

TA/2355
Elméleti
fizikai példatár
I.

Tankönyvkiadó, Budapest, 1981

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV
Kiadását a művelődési miniszter rendelte el

Szerzők:

GNÄDIG PÉTER

egyetemi adjunktus

(1., 2., 3., 4., 5., 6. és 16. fejezet)

PALLA LÁSZLÓ

egyetemi adjunktus

(7., 8., 9., 10., 11., 12., 13., 14., 15. fejezet)

Bírálta:

BOSCHÁN PÉTER

a fizikai tudományok kandidátusa

Szerkesztő:

NAGY KÁROLY

egyetemi tanár, akadémikus



ISBN 963 17 5677 7 összkiadás

ISBN 963 17 5678 5

© DR. GNÄDIG PÉTER-DR. PALLA LÁSZLÓ

TARTALOMJEGYZÉK

	Feladat	Megoldás
Vektorszámítás		
1. Műveletek vektorokkal	11	89
2. Lineáris operátorok	12	91
3. Tenzoralgebra	13	94
4. Mátrixok és determinánsok	15	97
5. Sajátértékek, sajátvektorok, főtenge- lytranszformáció	17	99
6. Vektoranalízis	20	106
Mechanika		
7. Alapfogalmak (kinetika, Newton-törvé- nyek, megmaradási tételek)	25	113
8. Egydimenziós mozgás	33	139
9. Mozcás centrális erőterben	35	143
10. Mozcás centrális erőterben	38	156
10. Rezcések	46	178
11. A mechanika elvei	58	208
12. Merev testek mozgása		
13. Mozcás leírása gyorsuló és forgó koordi- náta-rendszerben	69	233
14. Szórásszámítás	73	243
15. Rugalmasságtan	74	246
16. Hidrodinamika	82	272
Függelék		

ELŐSZÓ

A tanulásban a legfelemelőbb a felfedezés öröme, egy-egy probléma, feladat önálló megoldása. Ez alól a fizika tanulása sem kivétel, sőt a természet törvényeivel való ilyenfajta megismerkedés sokszor olyan mély hatást gyakorol a fiatalokra, hogy egy életre szóló elhivatottság alakul ki bennük.

Az oktatásban egyik vezérlő elvünk olyan módszerek elterjesztése, amelyek a hallgatók öntevékenységének maximális kifejtését szolgálják. Ennek megvalósítását segítik az előadásokhoz kapcsolódó fizikai gyakorlatok és versenyek, és ennek jegyében születtek azok a feladatok, amelyeket „Elméleti fizikai feladatok” címen most az olvasók kezébe adunk.

Ezeket a feladatokat az ELTE fizika tanszékeinek munkatársai több éves pedagógiai munkásságuk során gyűjtötték össze és ezek egy részét korábban sokszorosított formában – már közreadták. A példatár összeállításakor az egyszerűtől a bonyolultabb felé haladás didaktikai elve érvényesül: az egyes fejezetekben a feladatok nemcsak nehézségi sorrendben szerepelnek, de egy-egy problémakört egymásra épülő feladatok sorozatával is igyekeztek megvilágítani a szerzők. A feladatgyűjteményben a példák végeredményén kívül a legtöbb esetben útmutatás, sőt a teljes megoldás is megtalálható. A feladatok elsősorban a fizika szakos tanárjelöltek és a fizikushallgatók képzését segítik, de megoldásuk hasznos lehet nem fizika szakos hallgatók számára is.

Az első kötet a vektorszámítási feladatokon kívül a klasszikus mechanika különböző területeiről vett példákat tartalmazza. A következő kötet a klasszikus elektrodinamika, elektronika, a relativitáselmélet, ill. a termodinamika és a termodinamika területeit öleli fel. A harmadik kötetel kezdődnek a modern fizikával kapcsolatos feladatok.

A szükséges matematikai apparátus gyakorlása céljából valószínűségi számítási példákat is talál az olvasó. Ezt követi a nemrelativisztikus és a relativisztikus kvantummechanikai, valamint a statisztikus fizikai feladatok gyűjteménye. A negyedik kötet a sugárzáselméleten kívül a fizika alapelveinek az anyag szerkezetére való alkalmazásával kapcsolatos feladatokat tartalmazza. A kötet lezárásaként nagyobb alkotókészséget igénylő, komplex feladatok találhatók, melyek egy része korábban a hallgatók számára minden évben kiírt Ortvyay-versenyen szerepelt.

A példatár kollektív munka eredményeként született, melyben a fizika tanszékek következő oktatói vettek részt: Balog János, Dávid Gyula, Fái György, Gálfi László, Gnädig Péter, Horváth Zalán, Kiss Ádám, Lendvai Endre, Niedermayer Ferenc, Palla László, Patkós András, Rácz Zoltán, Ruján Pál, Sasvári László, Szabó György, Szalay Sándor, Tél Tamás, Tichy Géza. Az egyes kötetek szerzőiként az adott terület feldolgozásáért felelős munkatársak neve szerepel.

Budapest, 1980. augusztus

Nagy Károly
egyetemi tanár

FONTOSABB JELÖLÉSEK

Vektorok skalárszorzata: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

Vektorok vektoriális szorzata: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Vektorok diadikus szorzata: $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$

Kronecker-delta: $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i=k, \\ 0, & \text{ha } i \neq k \end{cases}$

Levi-Civita-szimbólum: $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i, j, k, \text{ az } 1, 2, 3 \text{ számok} \\ & \text{páros permutációja,} \\ -1, & \text{ha páratlan permutációja,} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

Egységmátrix: \mathbf{E} ; $E_{ik} = \delta_{ik}$

Transzponált mátrix: $\tilde{\mathbf{A}}$; $A_{ik} = A_{ki}$

Koordináták szerinti parciális derivált: $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$

Nabla-szimbólum: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Laplace-operátor: $\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Gradiens: $(\text{grad } \Phi)_i = \partial_i \Phi$

Divergencia: $\text{div } \mathbf{v} = \sum_k \partial_k v_k$

Rotáció: $(\text{rot } \mathbf{v})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k$

FELADATOK

VEKTORSZÁMÍTÁS

1. Műveletek vektorokkal

- 1.1. Fejezzük ki a háromszög területét az oldalak hosszával (Heron-képlet)!
- 1.2. Fejezzük ki a háromszög területét csúcsainak \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 és \mathbf{r}_3 helyvektoraival!
- 1.3. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{r}^2 + \mathbf{m}\mathbf{r} = c$ egyenlettel jellemzett görbe kör! (\mathbf{m} állandó vektor, c pedig egy állandó skalár.) Határozzuk meg a kör középpontját és a sugarát!
- 1.4. Bizonyítsuk be a vektorszorzás tulajdonságainak felhasználásával a cosinustételt!
- 1.5. A koordináta-rendszer tükrözésekor ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) előjelet váltó vektorok a poláris vektorok, a változatlanul maradók pedig az axiál-, vagy más néven pszeudovektorok. Soroljunk fel néhány, vektorral jellemezhető fizikai mennyiséget és osztályozzuk ezeket tükrözési tulajdonságaik szerint!
- 1.6. Egy folyadék áramlási sebessége \mathbf{v} . Mekkora tömegű folyadék áramlik át t idő alatt az \mathbf{S} vektorral jellemzett felületdarabon (\mathbf{S} merőleges a felületre, $|\mathbf{S}|$ pedig a felület nagyságával egyenlő)?
- 1.7. Határozzuk meg az

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} \times (\mathbf{x} + \mathbf{b})$$

egyenlet megoldását (\mathbf{a} és \mathbf{b} adott vektorok)!

- 1.8. Oldjuk meg a következő vektoregyenleteket:
 - a) $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
 - b) $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$,
 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = \alpha$.
 - c) $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$,
 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \alpha$.

- d) $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$,
 $\mathbf{b} \times \mathbf{x} = \mathbf{a}$.
 e) $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$,
 $\mathbf{b} \times \mathbf{x} = -\mathbf{a}$.
 f) $(\mathbf{x} + \mathbf{a}) \times (\mathbf{x} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{x}$.
 (a és b nullától különböző vektorok, α adott állandó.)

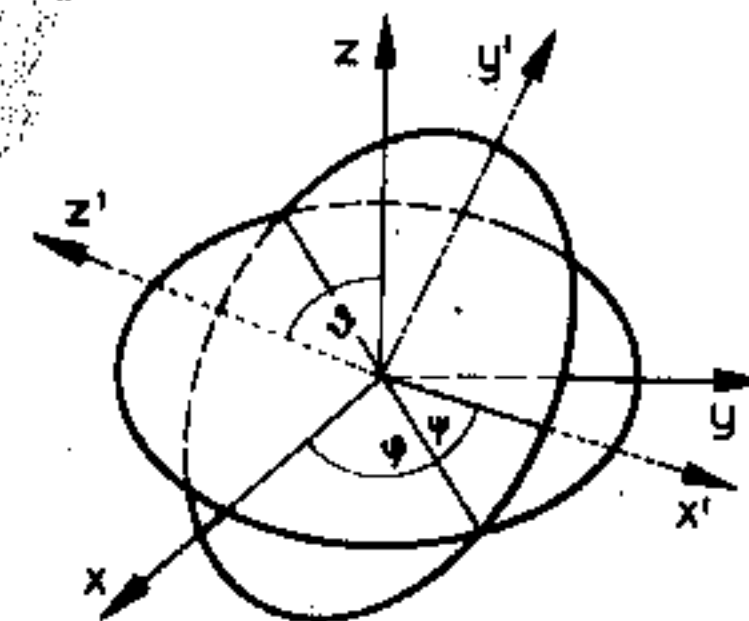
2. Lineáris operátorok

- 2.1. Melyik az a lineáris operátor, amely az \mathbf{e} irányvektorú egyenesre vetít, illetve tükröz? Határozzuk meg ezen operátorok négyzetét! ($\mathbf{e}\mathbf{e} = 1$.)
 2.2. Határozzuk meg az \mathbf{n} normálvektorú síkra vetítő, illetve tükröző operátort!
 2.3. Milyen síkbeli, illetve térbeli transzformációkat írnak le az alábbi mátrixok?

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
 e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Határozzuk meg az n -edik hatványukat, és ha létezik, az inverzüket is!

- 2.4. Határozzuk meg az $\mathbf{n} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ tengely körül 60° -os szöggel forgató transzformáció mátrixát!
 Útmutatás: Forgassuk be \mathbf{n} -et a z -tengelybe!
 2.5. Írjuk föl annak a transzformációnak a mátrixát, amely egy merev testet az ábrán látható ϑ , φ , ψ Euler-szögekkel forgat el!



- 2.6. Határozzuk meg a ϑ és φ térbeli polárszögekkel jellemzett tengely körüli ψ szögű forgatás mátrixát!
 2.7. Két, egymást követő térbeli forgatás művelete általában nem cserélhető föl egymással. Vizsgáljuk meg, milyen műveletnek felel meg kicsiny α -ra és β -ra az

$$\mathbf{O}^{(x)}(\alpha) \cdot \mathbf{O}^{(y)}(\beta) - \mathbf{O}^{(y)}(\beta) \cdot \mathbf{O}^{(x)}(\alpha)$$

lineáris transzformáció! ($\mathbf{O}^{(x)}(\alpha)$ az x -tengely körüli α szögű forgatást jelöli stb.)

3. Tenzoralgebra

- 3.1. Egy tenzort akkor nevezünk invariánsnak, ha elemei minden koordináta-rendszerben ugyanazok a számok. Mutassuk meg, hogy δ_{ik} illetve ε_{ijk} invariáns tenzorok!
 3.2. Bizonyítsuk be, hogy a nullvektoron kívül nincsen invariáns vektor, kétindexes invariáns tenzor pedig csak az egységtenzor többszöröse lehet! Melyek a háromindexes invariáns tenzorok?
 3.3. Az \mathbf{n} egységvektor egyenlő gyakorisággal mutat a tér bármelyik irányába. Mennyi az alábbi mennyiségek átlagértéke:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})^2, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}), (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, (\mathbf{a} \times \mathbf{n})^2, (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{n}),$$

ahol \mathbf{a} és \mathbf{b} adott állandó vektorok?

3.4. Határozzuk meg a

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm}$$

összeget tetszőleges i, j, l, m értékekre! Alkalmazzuk az eredményt kettős vektorszorzat kifejtésére!

3.5. ε_{ijkl} a négyindexes, teljesen antiszimmetrikus tenzor ($\varepsilon_{1234} = +1$). Határozzuk meg a következő kifejezéseket:

a) $\sum_{i=1}^4 \varepsilon_{ijkl} \cdot \varepsilon_{imns}$

b) $\sum_{i,j} \varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{ijmn}$

c) $\sum_{ijk} \varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{ijkm}$

d) $\sum_{i,j,k,l} \varepsilon_{ijkl} \varepsilon_{ijkl}$

3.6. Mutassuk meg, hogy minden infinitezimális forgatás mátrixa

$$\mathbf{O} = \mathbf{E} + \mathbf{\Omega} \quad (\mathbf{\Omega} \text{ antiszimmetrikus})$$

alakú! Milyen szemléletes jelentése van $\mathbf{\Omega}$ -nak?

3.7. Hogyan transzformálódik a koordináta-rendszer elforgatásakor az

$$A_{ij} = \iiint_{V_0} x_i x_j dV$$

térfogati integrál?

4. Mátrixok és determinánsok

4.1. Milyen λ mellett van az

$$5x + 2y - 3z = 0,$$

$$3x - 2y = 0,$$

$$4x + 3y + \lambda z = 0$$

egyenletrendszernek a triviálisól különböző megoldása?

4.2. Mely pontban metszik egymást a

$$3x + y + 7z = 11,$$

$$2x - 3y + 5z = 4,$$

$$5x - 2y + 10z = 13$$

síkok?

4.3. Tekintsük a

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} \alpha & \operatorname{sh} \alpha \\ 0 & \operatorname{sh} \alpha & \operatorname{ch} \alpha \end{pmatrix}$$

mátrixot!

a) Mennyi $\det \mathbf{B}(\alpha)$?

b) Milyen alakú a $\mathbf{B}(\alpha) \cdot \mathbf{B}(\beta)$ mátrix?

c) Milyen kapcsolatban áll egymással $\mathbf{B}(\alpha)$ és $\mathbf{B}(-\alpha)$?

4.4. Az alábbi mátrixok paramétereinek milyen választása mellett lesz \mathbf{A} és \mathbf{B} szorzata nulla?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & \beta & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.5. Van-e olyan – nullától különböző – (3×3) -as \mathbf{B} mátrix, amelyre teljesül az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ összefüggés, ahol

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix},$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$

4.6. Számítsuk ki a következő (úgynevezett Vandermonde) determináns értékét:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

4.7. Számítsuk ki a

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

($n \times n$)-es determináns értékét!

4.8. Határozzuk meg egy determinánsnak valamelyik eleme szerinti deriváltját!

4.9. **A** és **B** ($n \times n$)-es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy sohasem állhat fenn az

$$\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{E}$$

egyenlőség!

4.10. Számítsuk ki két, $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ típusú mátrix összegét és szorzatát!

4.11. Bizonyítsuk be, hogy felcserélhető blokkokból álló (2×2)-es hipermátrix determinánsa a blokkokból formálisan képzett „determináns-mátrix” determinánsával egyezik meg, tehát:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{AD} - \mathbf{BC}).$$

5. Sajátértékek, sajátvektorok, főtengety-transzformáció

5.1. Írjuk fel azt a mátrixot, amely a $\mathbf{t} = (1, 1, 2)$ vektor irányában $\lambda = 3$ arányban nyújt! Λ_z

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix hasonló tulajdonságú.

Keressük meg a hozzá tartozó tengelyt és a nyújtás arányát!

5.2. Melyik az a mátrix, amely a síkban az $(1, 5)$ irányban háromszorososan nyújt, a rá merőleges irányban pedig felére zsugorít? Számítsuk ki a transzformáció determinánsát!

5.3. Határozzuk meg az $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és normált sajátvektorait!

5.4. Rajzoljuk le, hogy mibe képezi le az előző feladatban szereplő mátrix egy egységsugarú kör pontjait!

5.5. Határozzuk meg az

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és a sajátvektorait!

5.6. a) Mit állíthatunk egy (3×3)-as ortogonális mátrix sajátértékeiről?

b) Melyik tengely körül és mekkora szöggel forog az

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 2 & & -1 \\ \sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} \\ 1 & 0 & 2 \\ \sqrt{5} & & \sqrt{5} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix?



- c) A forgatás szögét a forgástengely ismerete nélkül, közvetlenül a mátrixból is kiolvashatjuk. Lássuk be, hogy valódi forgatásokra (tehát amikor $\det \mathbf{O} = +1$)

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{O}_{ii} - 1 \right).$$

- 5.7. Milyen kúpszeletet ír le az

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 22x + 26y + 35 = 0$$

egyenlet? Mekkora a jellemző adatai, hol van a középpontja és hogyan állnak a tengelyei? Ábrázoljuk a görbét!

- 5.8. Milyen felületet ír le a

$$2x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 6x - 5z + 3 = 0$$

egyenlet?

- 5.9. Határozzuk meg az alábbi $(n \times n)$ -es mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Útmutatás: Vezessük be a $\lambda = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ jelölést!

- 5.10. Mivel egyenlő a

$$\sin(\mathbf{A} \cdot \varphi)$$

mátrix, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Útmutatás: Hozzuk az \mathbf{A} mátrixot diagonális alakra!

- 5.11. a) Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit, sajátvektorait és diadikus felbontását!

- b) Számítsuk ki a $\sin(\beta \mathbf{A})$ és a $\cos(\beta \mathbf{A})$ mátrixfüggvényeket!

- 5.12. Hogyan lehet meghatározni egy tetszőleges \mathbf{A} mátrix négyzetgyökét, vagyis a $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$ egyenlet megoldását? Mi a megoldhatóság feltétele? Számítsuk ki konkrétan az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix

négyzetgyökét!

- 5.13. a) Határozzuk meg az

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-x^2 + 2xy - 4y^2}$$

integrál értékét!

Útmutatás: Térjünk át más változókra és használjuk fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot e^{-t^2} = \sqrt{\pi}.$$

- b) Általában mennyi az

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdot \dots \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \cdot e^{-\mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}}$$

integrál értéke (\mathbf{M} egy $(n \times n)$ -es pozitív definit mátrix)?

- 5.14. Keressük meg a φ szögű síkbeli forgatást leíró

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

6. Vektoranalízis

6.1. Számítsuk ki az alábbi vektormezők divergenciáját és rotációját!

- $\mathbf{v} = r^n \mathbf{r}$,
- $\mathbf{v} = r^n \mathbf{a}$,
- $\mathbf{v} = r^n (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$,
- $\mathbf{v} = r^n (\mathbf{a} \mathbf{r})$,
- $\mathbf{v} = \mathbf{a} \ln r$,
- $\mathbf{v} = (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}$ (\mathbf{a} állandó vektor).

6.2. Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{rot grad } \Phi = 0,$$

$$\text{div rot } \mathbf{v} = 0,$$

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}!$$

6.3. Bizonyítsuk be, hogy

- $\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{u} - \mathbf{u} \text{ rot } \mathbf{v}$,
- $\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{v} + \mathbf{u} \text{ div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{u}$,
- $\text{rot}(\Phi \mathbf{u}) = \Phi \text{ rot } \mathbf{u} + (\text{grad } \Phi) \times \mathbf{u}$,
- $\text{grad}(\mathbf{u} \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u}$!

6.4. Milyen az elektromos térerősség egy \mathbf{p} dipólnyomatékú elektromos dipól körül?

6.5. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{r}}{r^3}$ vektorpotenciálhoz tartozó

$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ mágneses mezőt!

6.6. Tudjuk, hogy a

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2xy - z \\ x^2 + y^2 + z^2 \\ v_z \end{pmatrix}$$

vektormező rotációmentes.

- Mekkora v_z ?
- Határozzuk meg azt a Φ potenciált, amelyre $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$!
Útmutatás: Integrációs útnak célszerű az origóból kiinduló egyenest választani.

6.7. $\Phi(x, y) \equiv -2x^2 + xy$ a síkon értelmezett skalármező.

- Határozzuk meg a $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$ vektormezőt!
- Számítsuk ki $\text{grad } \Phi$ -t az $(x, y) = (1, 3)$ pontban!
- Képezzük az

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \\ -4 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

koordinátatranszformációt (forgatást)!

Milyen alakú $\Phi'(x', y')$, vagyis a skalármező az új koordináták függvényében?

- Számítsuk ki $\text{grad } \Phi$ komponenseit az új koordináta-rendszer azon pontjában, amely a régi rendszerben $(x, y) = (1, 3)$ volt!
- Milyen kapcsolatban áll egymással $\text{grad } \Phi$ kétféle előállításával? Rajzoljuk fel a vizsgált pontban $\text{grad } \Phi$ -t mindkét koordináta-rendszerben – de egyetlen ábrán!

6.8. Szemléltessük erővonalakkal az alábbi síkbeli vektormezőket:

- $\mathbf{v} = (2x, -2y)$,
- $\mathbf{v} = (-y, x)$,
- $\mathbf{v} = 3r \sqrt{r^2 + 7}$.

(Az erővonalak olyan vonalsereget alkotnak, melyek érintője a vektormező irányával, sűrűsége pedig a nagyságával egyezik meg.)

6.9 a) Igazoljuk, hogy az

$$x = a \text{ ch } u,$$

$$y = b \text{ sh } u$$

paraméteres egyenletek hiperbolát, az

$$x = a \cos v,$$

$$y = b \sin v$$

egyenletek pedig ellipszist írnak le!

b) Adjuk meg a fentiek alapján az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

felület kétparaméteres egyenletrendszerét! Milyen felületről van szó?

c) Adjuk meg a fenti felületre az $\iint \mathbf{v} d\mathbf{F}$ felületi integrálban szereplő $d\mathbf{F}$ felületelemet!

6.10. Határozzuk meg az

$$I = \iint_{(F)} \mathbf{r} d\mathbf{F}$$

felületi integrál értékét, ahol F az

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 9$$

egyenlettel megadott gömb!

6.11. Számítsuk ki a $\mathbf{v} = ix^3 + jy^3 + kz^3$ vektormező felületi integrálját az $r^2 = a^2$ gömbfelületre!

6.12. Hogyan lehet kifejezni egy test térfogatát felületi integrállal, illetve egy síkidom területét vonalintegrállal?

6.13. Számítsuk ki a következő felületi integrálokat!

a) $\iint \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dF,$

b) $\iint (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} dF$ (\mathbf{a} egy állandó vektor, \mathbf{n} pedig a felület normálvektora).

6.14. Mennyi munkát végzünk az

$$\mathbf{E} = k \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}$$

elektrosztatikus erőter ellenében, ha egy q töltésű testet az $\mathbf{r}_1 = (a, 0, 0)$ pontból egy egyenes mentén az $\mathbf{r}_2 = (0, a, 0)$ pontba mozdítunk el?

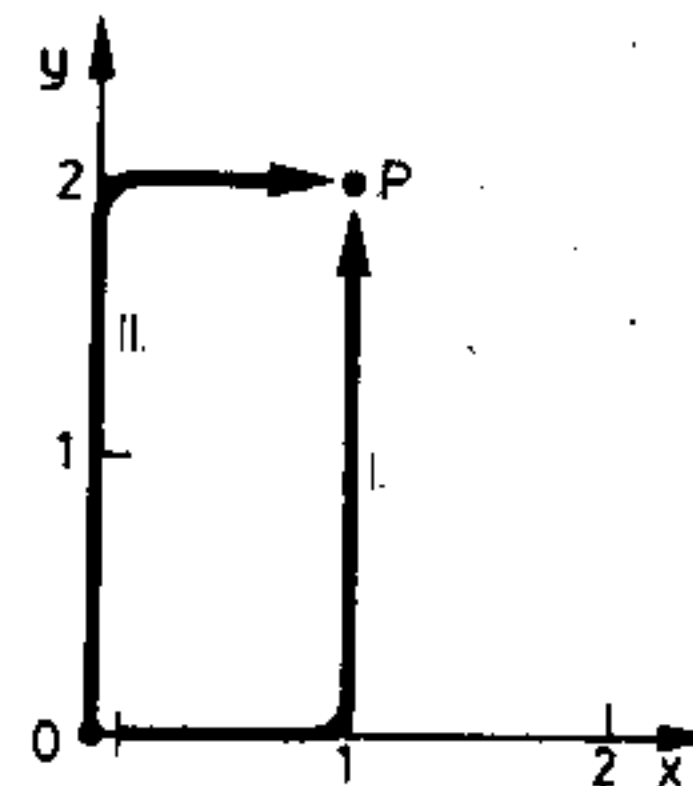
6.15. Egy időben változó mágneses mező az alábbi elektromos erőteret indukálja:

$$E_x = -5y,$$

$$E_y = 5x,$$

$$E_z = 0.$$

Mekkora munkavégzéssel juttathatunk el egy egységnyi töltésű testet az origóból a $P(1, 2)$ pontba az ábrán látható I. illetve II. jelű görbén mozogva?



6.16. Adott a

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3xy - x^2 - y \\ 2x + y^3 \\ x - y \end{pmatrix}$$

vektormező. Számítsuk ki az $\int_{(G)} \mathbf{v} d\mathbf{r}$ vonalintegrált az alábbi

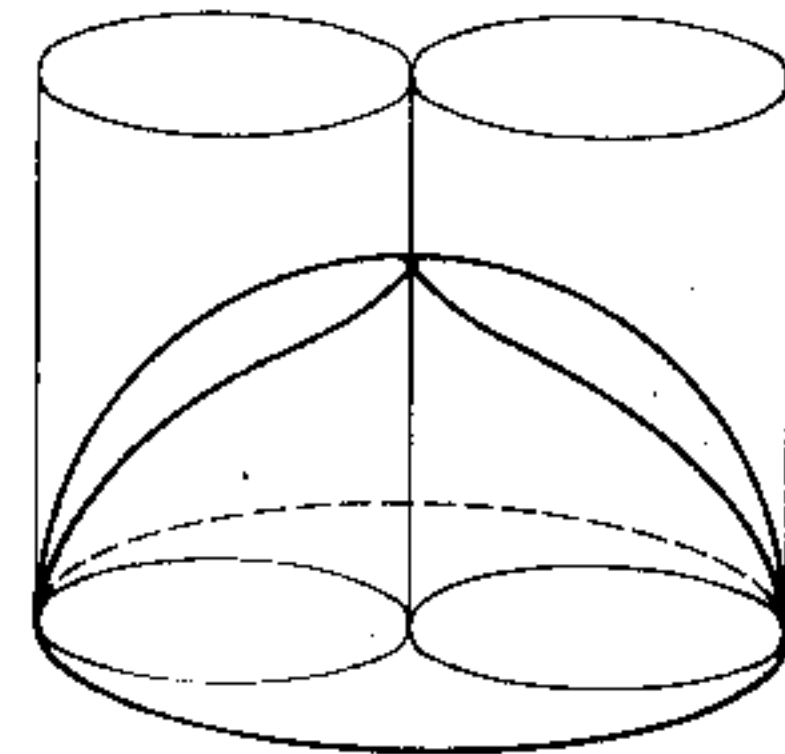
G görbékre:

a) Egy $R=3$ sugarú, z -tengely körüli csavarvonal egy menete az $\mathbf{A} = (3, 0, 0)$ és a $\mathbf{B} = (3, 0, d)$ pontok között;

b) \mathbf{A} -ból \mathbf{B} -be húzott egyenes szakasz.

Milyen d érték mellett lesz egyenlő a két integrál? Mit állíthatunk ekkor $\text{rot } \mathbf{v}$ -ről?

6.17. Egy R sugarú félgömbből két – egyenként $R/2$ sugarú – hengerrel két „ablakot” vágunk ki az ábrán látható módon. Mekkora a megmaradt rész felszíne? (Viviani problémája, 1692.)

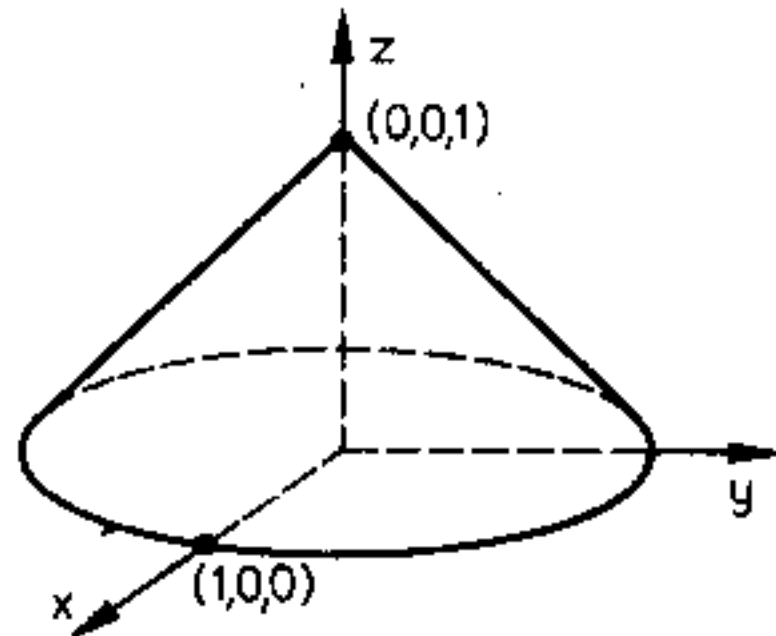


6.18. A rajzon látható kúp palástjára számítsuk ki a

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3x-y \\ zx^2-y \\ 2xy+z \end{pmatrix}$$

vektormező felületi integrálját

- közvetlen számítással,
- a Gauss-Osztrogradszkij-tétel felhasználásával! Számítsuk ki az alapkörre a $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ vonalintegrált
- a definíció alapján,
- a Stókes-tétel segítségével!



6.19. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r(r+z)} \cdot (-y, x, 0) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

vektormező rotációját, majd ennek felületi integrálját egy R sugarú gömbfelületre! Nincs ellentmondásban a kapott eredmény a Gauss-Osztrogradszkij-tétellel?

6.20. Valamely ortogonális görbevonaltú (u_1, u_2, u_3) koordináta-rendszerben az ívelemnégyzet

$$d\mathbf{r}^2 = h_1^2(u_1, u_2, u_3) du_1^2 + h_2^2(u_1, u_2, u_3) du_2^2 + h_3^2(u_1, u_2, u_3) du_3^2.$$

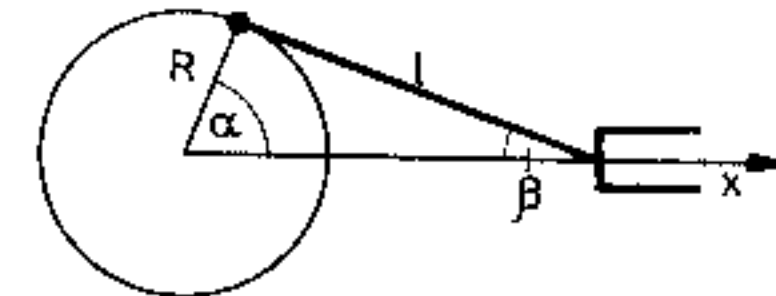
Fejezzük ki a h_i függvények segítségével egy $\Phi(\mathbf{u})$ skalármező gradiensének görbevonaltú koordinátáit, illetve egy $\mathbf{a}(\mathbf{u})$ vektormező divergenciáját és rotációját!

Útmutatás: Használjuk a grad, div és rot operátorok invariáns definícióját!

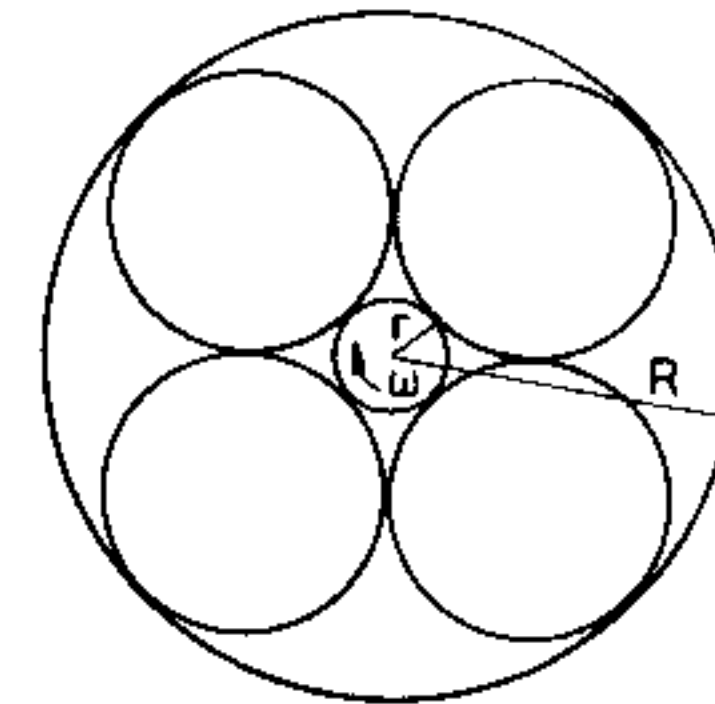
MECHANIKA

7. Alapfogalmak (kinetika, Newton-törvények, megmaradási tételek)

7.1. Egy dugattyút csuklós hajtókar köt össze egy lendkerékkel. Írjuk le a dugattyú mozgását, ha a lendkerék egyenletes ω szögsebességgel forog!



7.2. R sugarú hengeres üreg tengelyében r sugarú henger forog ω szögsebességgel. Hogyan mozog az ábrán látható, az r és R sugarú hengereket érintő további négy henger? (A hengerek sehol nem csúsznak meg.)



7.3. Határozzuk meg egy vízszintes síkon (csúszás nélkül, v sebességgel) gördülő R sugarú henger egyik kerületi pontjának a pályáját, valamint a sebességét és a gyorsulását!

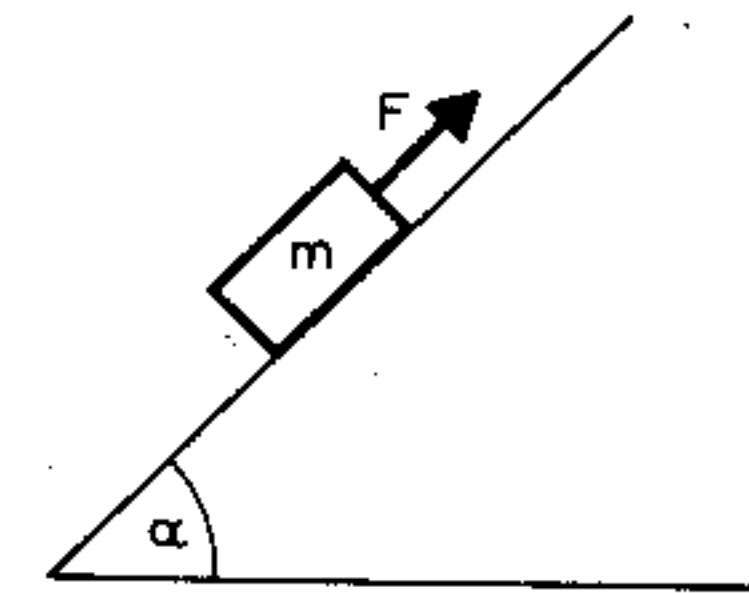
- 7.4. Határozzuk meg a sebesség és a gyorsulás sugarirányú és érintőleges komponenseit az

$$x = R \cos(\alpha t^2 + \delta), \quad y = R \sin(\alpha t^2 + \delta), \quad z = 0$$

egyenletekkel leírt egyenletesen gyorsuló körmozgás esetében!

- 7.5. Egy folyóban a víz sebessége $v = v_0 \left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right)$, ahol y a folyó közepétől mért távolság, $2l$ pedig a folyó szélessége. Milyen messzire sodor le a víz átkeléskor, ha a folyóra merőlegesen u sebességgel evezünk?
- 7.6. l_0 hosszúságú, tökéletesen rugalmas és korlátlanul nyújtható fonál egyik végét falhoz rögzítjük. Erről a végpontról v sebességgel elindul egy hangya a másik vég felé. Ugyanabban a pillanatban azonban egy gonosz manó $c \gg v$ állandó sebességgel elkezd húzni a fonál szabad végét. A hangyának a fonálhoz viszonyított sebessége az egész mozgás során állandó. Utolérheti-e a hangya a manót? (Mi történik, ha a hangya a manótól indul a fal felé?)
- 7.7. Egy rakétát függőlegesen felfőnek. 50 s-ig $2g$ gyorsulással halad felfelé, ekkor elfogy a hajtóanyaga. Írjuk le a mozgást! (A rakéta tömege állandónak tekinthető.)
- 7.8. Integráljuk a szabadesés egyenletét: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}m$, ahol $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$! A $t = 0$ időpillanatban $\mathbf{r}(0) = (0, 0, h)$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = (v_1, 0, v_2)$.
Vizsgáljuk külön a $v_1 = 0, v_2 > 0$ és a $v_1 = 0, v_2 < 0$ eseteket!
- 7.9. Vízszintes, sima lapon két egymással érintkező, m_1 és m_2 tömegű, sima felületű téglatest mozog állandó vízszintes F erő hatására. Határozzuk meg a testek gyorsulását! Mekkora erőt gyakorolnak egymásra? (A súrlódástól tekintsünk el!)
- 7.10. Vízszintes, sima lapon (N db) egymással érintkező, egyenként M tömegű, sima felületű téglatest mozog egy állandó F erő hatására. Határozzuk meg a testek gyorsulását és azt, hogy mekkora erőt gyakorolnak egymásra! (A súrlódástól tekintsünk el!)

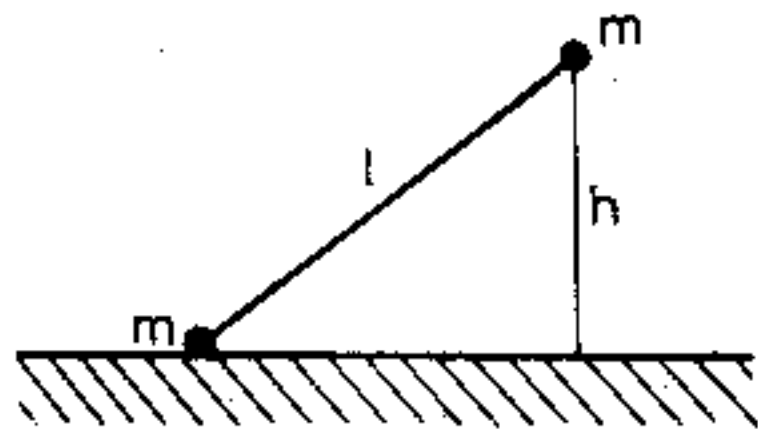
- 7.11. M_2 tömegű felvonó mennyezetén M_1 tömegű test függ. A felvonót állandó F erő gyorsítja felfelé ($F > (M_1 + M_2)g$). Az M_1 tömeg kezdetben s távolságra van a felvonó aljától.
- Határozzuk meg a felvonó gyorsulását!
 - Mekkora erő hat az M_1 -et tartó kötélen?
 - Ha ez a kötélen elszakad, mekkora lesz közvetlenül ezután a felvonó és M_1 gyorsulása?
 - Mennyi idő múlva éri el M_1 a felvonó alját?
- 7.12. Egy fonál egyik végét a mennyezethez erősítjük, másik végére m_1 tömegű testet akasztunk, ehhez egy rugót kötünk, majd a rugóra egy m_2 tömegű testet. Kezdetben a rendszer nyugalomban van. Ekkor elégetjük a fonalat. Mekkora lesz a testek gyorsulása a következő pillanatban?
- 7.13. Vízszintes lapon fekvő m tömegű testre $F(t) = F_0 \cdot t/t$ erő hat. A test és a lap között a súrlódási együttható μ . Írjuk le a test mozgását, ha kezdetben ($t=0$) nyugalomban volt!
- 7.14. Egy α hajlásszögű lejtő és a ráhelyezett m tömegű test között a súrlódási együttható μ . Mekkora lejtőirányú erővel lehet a testet egyensúlyban tartani?



- 7.15. Egy $\alpha = 30^\circ$ -os lejtőre 1 m magasságban egy $m = 10$ kg tömegű testet helyezünk. A test és a lejtő között a súrlódási együttható $\mu = 0,6$. Írjuk le a mozgást!
- 7.16. Vízszintes lapon fekvő, l hosszúságú kendő végére m tömegű testet helyezünk. A test és a kendő között a súrlódási együttható μ . A kendőt egyenletes a gyorsulással kirántjuk a test alól. Mekkora lesz a test sebessége abban a pillanatban, amikor elhagyja a kendőt?

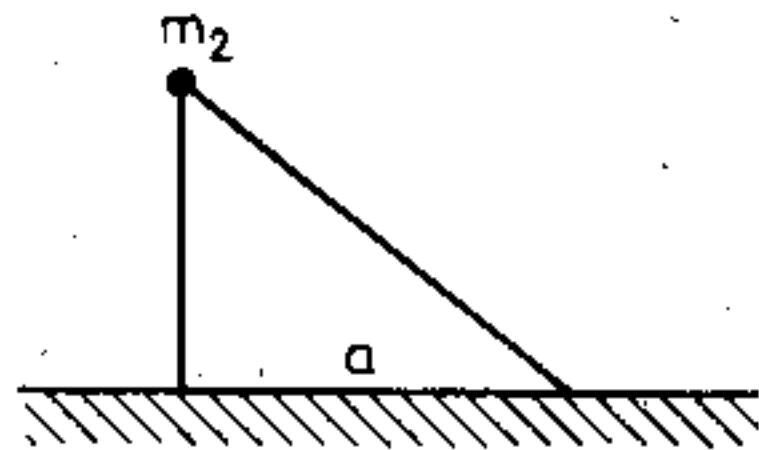
- 7.17. Kör alakra hajlított, rögzített vízszintes drótra m tömegű golyó van felfűzve. A golyó a dróton csúszhat, a súrlódási együttható μ . Legalább mekkora kezdeti sebességet kell adnunk a golyónak, hogy visszaérkezzen arra a helyre, ahonnan indították? (A drótkör sugara R .)
- 7.18. Egy testre a nehézségi erőn kívül a sebességgel arányos fékező erő hat. ($F_s = -\alpha v$)
- Írjuk le a test mozgását, ha h magasságból, kezdősebesség nélkül indult!
 - Milyen lesz a test mozgása $t \gg \frac{m}{\alpha}$ és $t \ll \frac{m}{\alpha}$ esetén?
 - Hogyan változik időben a test mechanikai energiája?
- 7.19. Sebességgel arányos közegellenállás esetében mennyi idő múlva áll meg egy v_0 sebességgel meglökött test? Mekkora utat tesz meg ezalatt?
- 7.20. Milyen magasra emelkedik egy v_0 sebességgel függőlegesen felhajított test, ha a sebességgel arányos fékező erő ($F_s = -\alpha v$) hat rá? Mennyi idő alatt éri el a pálya legmagasabb pontját?
- 7.21. φ szög alatt, v_0 kezdősebességgel elhajítunk egy m tömegű testet. Tegyük fel, hogy a közegellenállás a sebességgel arányos ($-\alpha v$). Határozzuk meg első közelítésben – kis α esetén – a test pályájának eltérését a légüres térbeli pályától! Hol esik le a test és mennyi idő telik el addig? Mi a lineáris közelítés alkalmazhatóságának feltétele?
- 7.22. Egy testre a nehézségi erőn kívül a sebesség négyzetével arányos fékező erő hat.
- Milyen magasra emelkedik, ha v_0 kezdősebességgel földobjuk?
 - Mekkora sebességgel és mennyi idő alatt ér földet, ha h magasságból elejtjük?
 - Mekkora sebességgel ér vissza, ha v_0 kezdősebességgel földobjuk?
- Adjuk meg a test helyzetét az idő függvényében!
- 7.23. Egy tömegpontra a sebességére és a z -tengelyre merőleges irányú, sebességével arányos nagyságú erő hat. Kezdetben ($t=0$) $x=y=z=0$, $v_x=v_{x0}$, $v_y=v_{y0}$, $v_z=0$. Írjuk le a mozgást!

- 7.24. Van-e az $F = F_0 \mathbf{r}$ és az $\mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{A}$ (F_0 és \mathbf{A} állandók) erőknek potenciáljuk? Érvényes-e az energiamegmaradás a fenti erők hatására létrejövő mozgások esetében?
- 7.25. $V = \frac{1}{2} kx^2$ potenciáltérben m tömegű részecske mozog. Induláskor ($t=0$) $x=a$, $\dot{x}=0$. Írjuk le a mozgást $k=0$, $k < 0$ és $k > 0$ esetén! Hogyan változik a részecske energiája és impulzusa a mozgás során?
- 7.26. Mennyivel változna meg a nehézségi gyorsulás értéke, ha a Föld sugara 1%-kal megnőne? (A Föld tömege nem változik.)
- 7.27. Milyen nagyságú gravitációs vonzóerőt fejt ki egy l hosszúságú, q keresztmetszetű, ρ sűrűségű homogén rúd a tengelyének irányában, a végpontjától d távolságra levő m tömegpontra?
- 7.28. Határozzuk meg egy $\rho(r)$ sűrűségeloszlású a sugarú gömb gravitációs potenciálját! Milyen legyen $\rho(r)$, ha azt akarjuk, hogy a gömb belsejében mindenütt állandó nagyságú erő hasson? (r a gömb középpontjától mért távolság.)
- 7.29. Hol nagyobb a nehézségi gyorsulás: a Föld felszínén, vagy egy mély bányaknában? Becsüljük meg az eltérést! (A gömb alakúnak tekintett Föld átlagos sűrűsége $5,5 \text{ g/cm}^3$, a kéregé kb. 3 g/cm^3 . A Föld forgását hanyagoljuk el!)
- 7.30. Mekkora erővel tudná egy óriás az egyenlítője mentén kettéfűrészelt Földet széthúzni? (Tegyük fel, hogy a Föld egyenletes sűrűségű!)
- 7.31. A Hold felszínétől h magasságban elejtünk egy testet.
- Mekkora sebességgel ér a Hold felszínére? Vegyük figyelembe, hogy a nehézségi erő a magassággal változik, és az eredményt hasonlítsuk össze azzal, amit állandó gyorsulás esetén kapnánk!
 - Mekkora h magasságig lesz az eltérés 1%-nál kisebb? (A Hold sugara 1400 km .)
- c) Határozzuk meg az esés idejét is!
- 7.32. l hosszúságú súlytalan rúd végére két, egyenként m tömegű pontszerű testet rögzítünk. A rendszert sima vízszintes lap fölött az ábrán látható helyzetben elengedjük. Határozzuk meg

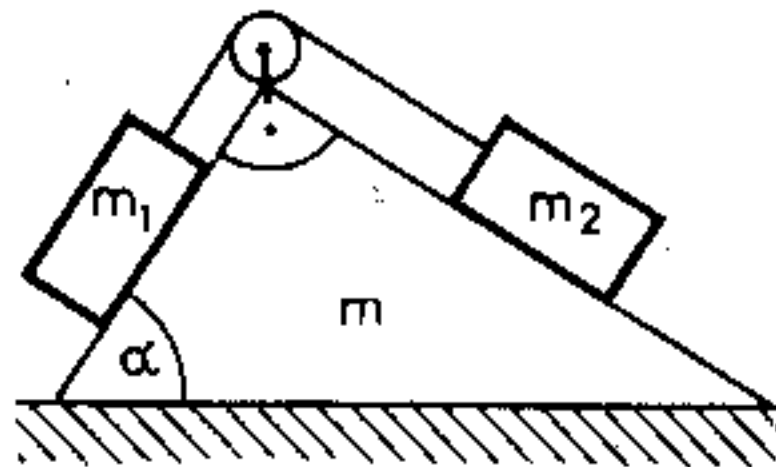


az egyes testek sebességét a becsapódás pillanatában! Hogyan módosul az eredmény, ha a tömegek különböznek?

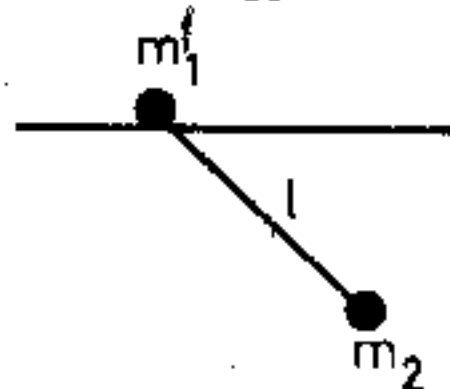
- 7.33. Mennyivel mozdul el a vízszintes síkban az m_1 tömegű ék, miközben az m_2 tömegű test végigcsúszik rajta? A súrlódás mindenütt elhanyagolható. Az ék hosszúsága a .



- 7.34. Mennyit mozdul el az ábrán látható ék, miközben az m_1 tömegű testnek az alaptól mért magassága h -val csökken?



- 7.35. Az ábrán látható rendszert kezdősebesség nélkül elengedjük. Határozzuk meg az m_2 tömegű test pályáját! (A súrlódás elhanyagolható, m_1 vízszintes egyenes mentén elmozdulhat.)



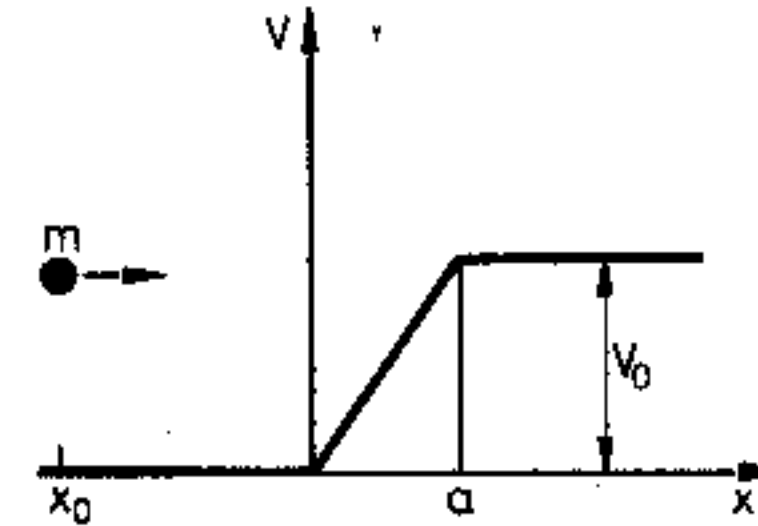
- 7.36. l hosszúságú súlytalan rúd végeire m tömegű pontszerű teste-
ket erősítünk. A rendszert úgy helyezzük el a világűrben, hogy
a rúd a Föld középpontja felé mutasson, és a közelebbi vég-
pontja R távolságra legyen a Föld középpontjától.
Mekkora a rendszer gyorsulása és a rúdban ébredő erő köz-
vetlenül az elengedés után? Mekkora lenne a rendszer tömeg-
középpontjában elhelyezett $2m$ tömegű test gyorsulása?
- 7.37. Egy nyugvó M tömegű test felé u sebességű m tömegű test kö-
zeledik, majd rugalmasan ütköznek. Határozzuk meg az ütkö-
zés utáni sebességeket, feltételezve, hogy az ütközés centrális!
Vizsgáljuk az $m \ll M$, $M \gg m$ és az $M = m$ eseteket!
- 7.38. m tömegű test u sebességgel rugalmasan nekiütközik egy
 M tömegű testnek, amely kezdetben nyugalomban volt. Az üt-
közés után az m tömegű test eredeti sebességére merőleges
irányban mozog. Milyen irányban mozog az M tömegű test és
mekkora a testek sebessége? ($M > m$.)
- 7.39. Egy részecske rugalmasan ütközik egy másik, nyugvó részecs-
kével. Az ütközés után pályája ϑ_1 szöget zár be a becsapódási
iránnyal; az eredetileg nyugvó részecske pályája pedig ϑ_2 szö-
get (az ellenkező irányban). Mutassuk meg, hogy e két, könny-
en mérhető adat ismerete elegendő a tömeg- és sebességará-
nyok meghatározásához. Adjuk is meg ezeket az arányokat!
- 7.40. Mekkora lehet az előző feladatban a becsapódó részecske ma-
ximális eltérülési szöge, ha a nyugvó részecske tömege kisebb
a becsapódónál?
- 7.41. Három, azonos tömegű test egy egyenes mentén mozoghat;
közülük kettő áll, egymással érintkezik. A harmadik u sebes-
séggel közeledik feléjük, majd rugalmas ütközés játszódik le.
Mekkora lehet az egyes testek sebessége az ütközés után? Mi-
től függ, hogy melyik megoldás valósul meg?
- 7.42. Vízszintes lapon nyugvó, két, egyenként M tömegű testet k di-
rekciós állandójú rugó kapcsol össze, melynek hossza feszült-
ségmentes állapotban d . Egy m tömegű, v sebességű test rugal-
masan ütközik a két M tömegből és a rugóból álló rendszer-
rel. Határozzuk meg, hogyan mozog a három test az ütközés
után, feltételezve, hogy az ütközés centrális! (A súrlódástól és
a rugó tömegétől tekintünk el!)

8. Egydimenziós mozgás

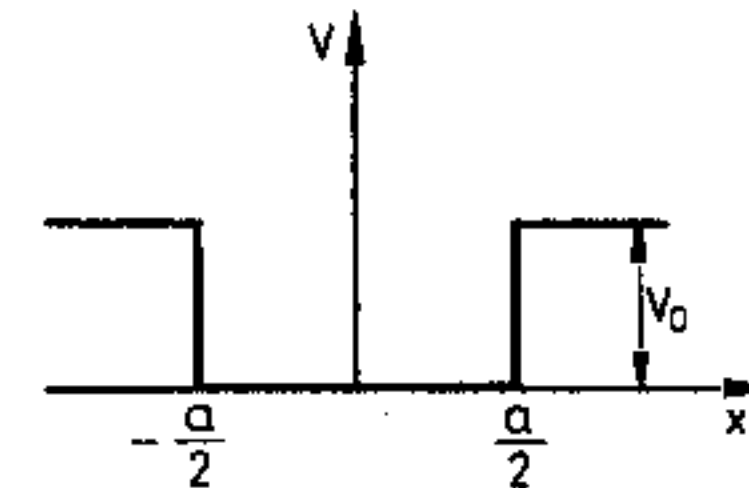
- 7.43. $S = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ keresztmetszetű vízszög merőlegesen egy falnak ütközik. Mekkora erővel nyomja a falat, ha a víz sebessége $v = 12 \text{ m/s}$?
- 7.44. Ritka gázban mozgó testre ható súrlódási erő arányos a sebesség négyzetével. Magyarázzuk meg, hogy miért! Hogyan függ a súrlódási erő a test lineáris méreteitől?
- 7.45. A nagyobb esőcseppek gyorsabban esnek, mint a kisebbek. Miért?
- 7.46. Határozzuk meg, hogy a világűrben mekkora sebességre lehet egy v_0 sebességű rakétát felgyorsítani M tömegű üzemanyag elégetése árán, ha a rakéta „hasznos” (üzemanyagon felüli) tömege M_0 , és az elégett gázok a rakétát $-V$ sebességgel hagyják el! (v_0 és V ellentétes irányú.)
- 7.47. Vízszintes lap fölött h magasságban elejtünk egy gumilabdát. Mennyi idő múlva áll meg a labda? A visszapattanási és a becsapódási sebesség hányadosa $\varepsilon < 1$, a közegellenállástól eltekinthetünk.
- 7.48. Egy autó, miközben 10 km/h -ról 20 km/h -ra növeli a sebességét, háromszor annyi benzint fogyaszt (mondjuk 3 cm^3 -t), mint miközben 0 -ról 10 km/h -ra gyorsul (1 cm^3). Ha viszont az előző esetben a gyorsítást egy 10 km/h sebességű, az autóval egyirányban haladó vonatból nézzük, azt tapasztaljuk, hogy az autó 0 -ról 10 km/h -ra gyorsult és eközben 3 cm^3 benzint fogyasztott. Hova lett (a vonatból nézve) 2 cm^3 benzinnel megfelelő energia?
- 7.49. Képzeljük el, hogy az Egyenlítőn egy magas hegy tetejéről vízszintes irányban kilövünk egy ágyúgolyót. Mekkora sebességgel kell kilőni ahhoz, hogy megkerülje a Földet? Merre célszerű kilőni az ágyúgolyót? Mekkora az ehhez szükséges munka?

- 8.1. A m tömegű részecske mozog az ábrán látható egydimenziós potenciállépcső felé. A részecske mozgási energiája kezdetben (az $x_0 < 0$ pontban) E .
- Mi a feltétele annak, hogy a részecske eljusson az $x > a$ tartományba?
 - Megmarad-e a mozgás során a részecske impulzusa?
 - Írjuk le részletesen is a mozgást!

(A potenciált a $V(x) = 0$ ($x < 0$); $V(x) = \frac{V_0}{a} x$ ($0 < x < a$); $V_0(x > a)$ kifejezés adja.)



- 8.2. A m tömegű részecske mozog a V_0 mélységű, a szélességű derékszögű potenciálvölgyben E energiával. Határozzuk meg, hogy
- mi a feltétele annak, hogy a részecske kötve maradjon a potenciálvölgyben;
 - ebben az esetben a részecske mozgásának periódusideje hogyan függ E -től!



8.3. A m tömegű, E energiájú részecske mozog a

a)

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } x < 0, \\ Fx, & \text{ha } 0 < x; \end{cases}$$

b)

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } x < 0, \\ ax^2, & \text{ha } 0 < x \end{cases}$$

potenciálokban. Határozzuk meg, hogyan függ a mozgás periódusideje E -től!

8.4. Határozzuk meg az m tömegű részecske rezgésidejének a részecske energiájától való függését, ha az a

a)

$$V(x) = -\frac{V_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x} \quad (-V_0 < E < 0);$$

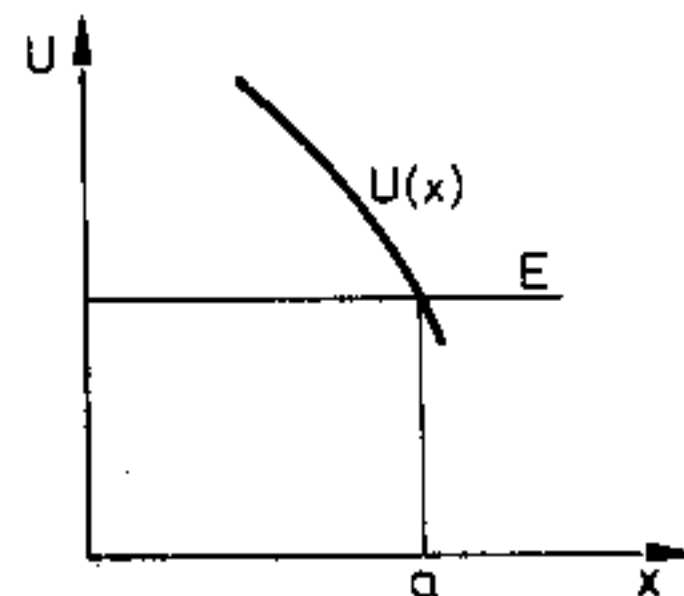
b)

$$V(x) = V_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$$

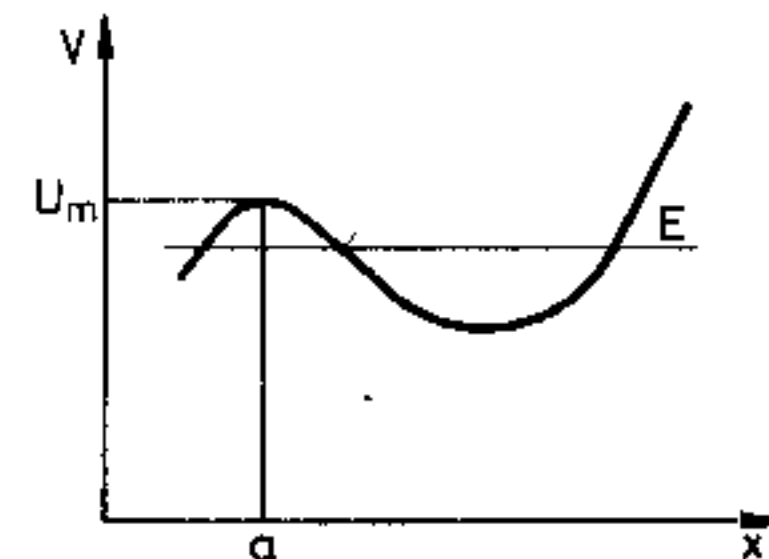
potenciálokban mozog!

8.5. Írjuk le a részecske mozgását az $U(x) = -Ax^4$ potenciálban, ha tudjuk, hogy energiája 0!

8.6. Határozzuk meg közelítőleg a részecske mozgását az $x=a$ megállási pont közelében! Vizsgáljuk külön az $U'(a) \neq 0$ és az $U'(a) = 0, U''(a) \neq 0$ eseteket!



8.7. Az m tömegű, E energiájú részecske mozog az ábrán látható potenciálvölgyben. Határozzuk meg, hogy milyen törvény szerint válik végtelenné a részecske rezgésideje, ha $E \rightarrow U_m$? ($V''(a) \neq 0$.)



8.8. A m tömegű részecske $V(x) = Ax^2 + Bx^4$ alakú potenciálgödörben mozog. Adjuk meg a mozgás periódusidejét mint a részecske teljes energiájának függvényét! ($B > 0$)

9. Mozgás centrális erőterben

- 9.1. Mekkora sebességgel lehet Föld körüli körpályán tartani egy mesterséges holdat?
- 9.2. Ha a Földet és a Napot egy rendszernek tekintjük (és a többi égitest hatását elhanyagoljuk), megmarad-e a rendszer energiája, impulzusa, impulzusmomentuma? Ha a Napot rögzített erőforrásnak tekintjük, megmaradnak-e a fenti mennyiségek a Földre vonatkozóan? Mekkora a tömegközépponti rendszerben a Nap energiája, impulzusa és impulzusmomentuma?
- 9.3. Tekintsük a Nap, a Föld és a Hold együttesét. Az $m_N \gg m_F \gg m_H$ egyenlőtlenség miatt ezeket három különböző módon is szemlélhetjük:
- a) A teljes Nap-Föld-Hold-rendszert tekintjük;

b) A Napot rögzített vonzócentrumnak tekinthetjük, amelynek az erőterében mozog a Föld–Hold-rendszer. (Ezek visszahatását a Napra elhanyagoljuk.)

c) A Napot és a Földet külső erőcentrum forrásának tekintjük, és ezek erőterében vizsgáljuk a Hold mozgását. (Ez utóbbi visszahatását a Földre és a Napra elhanyagoljuk.)

Teljesül-e a megfelelő rendszer energiájára, impulzusára, impulzusmomentumára vonatkozó megmaradási tétel?

(A megfelelő rendszer: a) N–F–H; b) F–H; c) H.)

9.4. Egy üstökös a végtelenből v_0 sebességgel érkezik a Naprendszerbe. Ha a Nap nem vonzaná, b távolságra haladna el tőle (az ún. impakt vagy ütközési paraméter). Milyen távolságra közelíti meg az üstökös a Napot és mekkora itt a sebessége?

9.5. Az ε excentricitású ellipszisen keringő bolygó sebessége Napközelben v_1 . Mekkora a sebessége Naptávolságban?

9.6. Egy űrhajó r_0 sugarú körpályán kering a Föld körül. Hajtóművét pillanatszerűen bekapcsolva, sebességét 8%-kal megnövelik.

a) Mekkora lesz az új pálya „Föld-távola”?

b) Írjuk le az új pálya egyenletét!

9.7. Azt találjuk, hogy egy kettőscsillagban a két égitest egymástól mért távolsága állandó.

a) Milyen pályán mozog a két csillag?

b) Mekkora a keringés periódusideje?

9.8. Ahhoz, hogy egy test a Földet elhagyhassa kb. 11 km/s kezdeti sebességre van szüksége. Ha egy bolygóközi szondát a Föld légkörének külső zónájából 13 km/s sebességgel indítanak el, mekkora lesz a Földhöz viszonyított sebessége, amikor a Földtől $6 \cdot 10^6$ km-re van?

9.9. Mekkora sebességgel kellene kilőni egy ágyúgolyót a Föld felszínéről ahhoz, hogy elhagyja a Naprendszert? (A légellenállást és a többi égitest hatását hanyagoljuk el!) Milyen irányban célszerű kilőni?

9.10. m tömegű részecske mozog a $V(r) = \frac{k}{2} r^2$ potenciáltérben. Ke-

ressük meg a mozgásállandókat! Írjuk fel a pálya egyenletét! Hogyan függ a periódusidő a pálya adataitól?

9.11. Határozzuk meg az $U = \begin{cases} -V, & \text{ha } r < R, \\ 0, & \text{ha } r > R \end{cases}$ potenciálban mozgó m tömegű részecske pályáját!

9.12. Határozzuk meg az m tömegű (E energiájú) részecske pályáját, ha az $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$ ($\alpha < 0$) potenciálban mozog!

9.13. m tömegű részecske az $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$ potenciáltérben mozog. Határozzuk meg a pályáját! Mekkora a perihélium-elfordulás?

9.14. Határozzuk meg azt a legkisebb távolságot, amelyre a végtelenből b ütközési paraméterrel és v sebességgel induló m_1 tömegű részecske az eredetileg nyugvó m_2 tömegű részecskét megközelíti! A köztük fennálló kölcsönhatás: $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$.

9.15. Mutassuk meg, hogy az $F(r) = -\frac{k}{r^n}$ ($k > 0$) centrális erő hatására kialakuló körpálya stabil, ha $n < 3$!

9.16. Mutassuk meg, hogy az $F(r) = -mg(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}$ radiális erő hatására kialakuló ϱ sugarú körpálya körüli kis rezgések frekvenciája:

$$\omega^2 = \frac{3g(\varrho)}{\varrho} + g'(\varrho).$$

9.17. Vizsgáljuk meg az $U(r) = -\frac{k}{r} e^{-r/a}$ (árnyékolt Coulomb-potenciál)-ban kialakuló körpályák stabilitását!

9.18. Vizsgáljuk meg milyen energia és impulzusnyomaték esetén eshet be az m tömegű részecske az

a) $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$,

$$b) U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\gamma}{r^3}$$

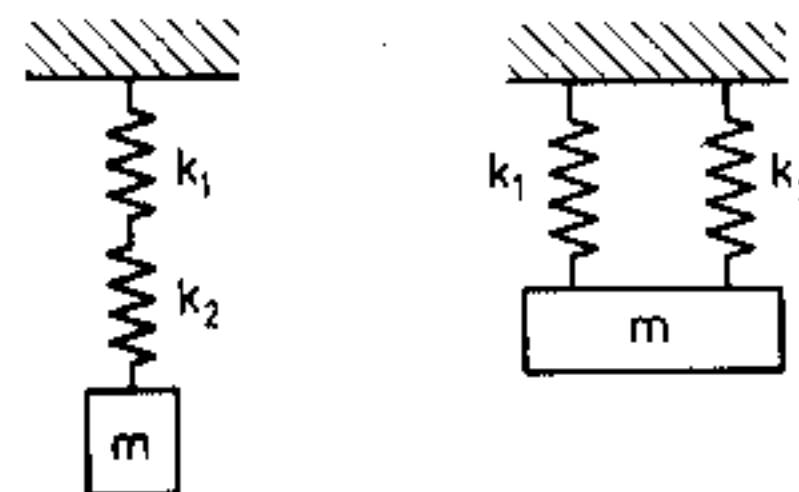
potenciál centrumába!

- 9.19. Véges R távolságból induló részecske esik az $U(r) = -\alpha r^{-n}$ potenciál közepébe. Véges számú fordulatot tesz-e meg közben? Véges idő alatt esik-e be?
- 9.20. Határozzuk meg a kis excentricitású pályán mozgó bolygók r , φ koordinátáinak időfüggését az excentricitásban első-, ill. másodrendig! További paraméterként célszerű a nagytengely hosszúságát, ill. a keringési időt használni.
- 9.21. Hogyan változik egy bolygó pályája és keringési ideje, ha a gravitációs állandó lassan csökken? $\left(\frac{1}{G} \frac{dG}{dt} = -\beta\right)$

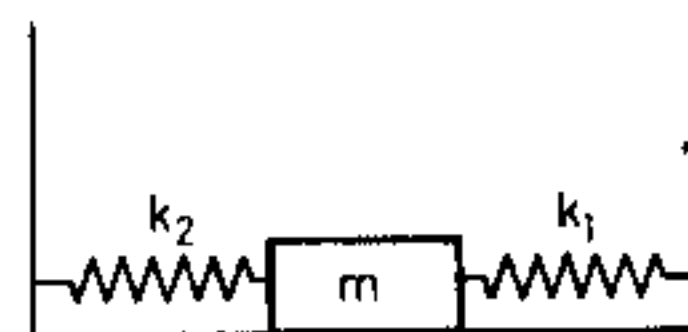
10. Rezgések

- 10.1. mg súlyú testet K rugóállandójú súlytalan rugóra akasztunk. A testet kezdősebesség nélkül elengedjük abban a helyzetben, amelyben a rugó feszültségmentes. Adjuk meg a kitérést az idő függvényében!
- 10.2. Egy $0,5$ kg tömegű testet olyan rugóra függesztünk, amely $0,1$ N erő hatására 8 cm-rel nyúlik meg. A testre mozgása során sebességével arányos ellenállás hat, amely 1 cm/s sebesség esetén $0,05$ N. A $t=0$ pillanatban a rugó – egyensúlyi helyzetéhez képest -5 cm-rel megnyúlik, a testet kezdősebesség nélkül indítjuk. Határozzuk meg a test mozgását!
- 10.3. Hogyan változik meg az előző test mozgása, ha olyan rugóra akasztjuk, amely 1 N hatására 8 cm-rel nyúlik meg és minden egyéb körülményt változtatlanul hagyunk?
- 10.4. 10 kg tömegű testre rugalmas erő hat, amelynek nagysága 1 cm elmozdulás esetén $0,02$ N. A közegellenállás arányos a sebességgel. Három rezgés után az amplitúdó tizedrészére csökken. Határozzuk meg a rezgés periódusát!

- 10.5. Határozzuk meg a nehézségi erőterben, az ábrán látható módon a k_1 és k_2 irányú rugókra erősített m tömegű test mozgásegyenletét és a rezgési frekvenciát!



- 10.6. Határozzuk meg a vízszintes síkon mozgó m tömegű test rezgéseinek frekvenciáját, ha az ábrán látható módon két, elhanyagolható tömegű rugóhoz van kapcsolva (rugóállandók: k_1 és k_2)!

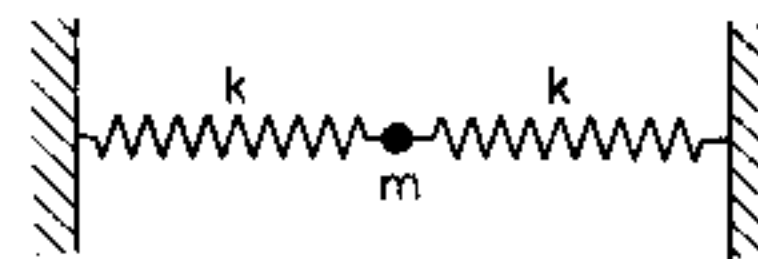


- 10.7. Az A amplitúdóval és ω_0 frekvenciával vízszintes síkon rezgő m tömegű testre az egyensúlyi helyzetben át haladva felülről M tömegű agyagdarab esik, mely rátapad. Mekkora lesz az új rezgésidő és az amplitúdó?
- 10.8. Egy M tömegű kosár k irányú rugón nyugszik. A kosár felett h magasságból m tömegű testet ejtünk le, amely rugalmatlanul ütközve a kosárban marad. Milyen amplitúdóval fog rezegni a kosár?
- 10.9. Síklemez a rajta nyugvó testtel együtt harmonikus rezgést végez a vízszintes síkban. A rezgés amplitúdója A ($=10$ cm). Mekkora a lemez és a test közötti súrlódási együttható, ha a test akkor kezd csúszni a lemezen, amikor a rezgésidő kisebb lesz, mint T ($=1$ s)?

- 10.10.** Nehézségi erőterben vízszintes síkon nyugvó m_2 tömegű testre k direkciós erejű rugó tetején nyugvó m_1 tömegű testet erősítünk. Mennyire lehet a rugót összenyomni, ha azt akarjuk, hogy elengedve, az m_2 tömegű test ne ugorjon fel a vízszintes síkról?
- 10.11.** Mutassuk meg, hogy egy gömbinga periódusideje ugyanakkora, ha egy kis kör mentén mozog, mint ha síkban kis lengéseket végez! Milyen más mozgásokat végezhet még (kis kitérések esetén)?
- 10.12.** ω_0 frekvenciájú és $-\alpha\dot{x}$ csillapítású oszcillátorra $F_0 \cos \omega t$ gerjesztő erő hat. Írjuk le a kialakuló kényszerrezgést! Határozzuk meg a rendszer rezonanciafrekvenciáját (azaz azt az ω frekvenciát, amelynél a rezgés amplitúdója maximális)! Vizsgáljuk meg a gerjesztés és a rezgés közötti fáziskülönbséget!
- 10.13.** k direkciós erejű rugó felfüggesztési pontja $x_0 \cos \omega t$ szerint mozog. A rugóra függesztett test súrlódó közegbe nyúlik, ezért $-b\dot{x}$ fékező erő hat rá. Mekkora a súly stacionárius rezgéseinek amplitúdója?
- 10.14.** Írjuk le egy k direkciós állandójú rugóra kötött test kényszerrezgését az $x(t_0)=0, v(t_0)=0$ kezdeti feltételek mellett, ha a ható erő
- $F(t) = \text{állandó} = F_0,$
 - $F(t) = at,$
 - $F(t) = F_0 e^{-at}.$
- 10.15.** A kezdetben nyugalomban levő ($x(0)=\dot{x}(0)=0$) oszcillátorra τ ideig állandó F_0 erő hat. Adjuk meg a kitérést az idő függvényében! Hogyan módosul a kapott kifejezés a $\tau \rightarrow 0, F_0\tau = \text{állandó}$ határesetben? (Pillanatszerű lökés.) Adjuk meg annak feltételét, hogy egy véges τ ideig tartó lökést közelítőleg pillanatszerűnek tekinthessünk!
- 10.16.** Az előző feladat alapján hogyan fejezhető ki a kitérés tetszőleges $F(t)$ külső erő esetén?
Útmutatás: Bontsuk fel F -et sok kis „impulzus” összegére és használjuk ki az oszcillátor mozgásegyenletének linearitását!

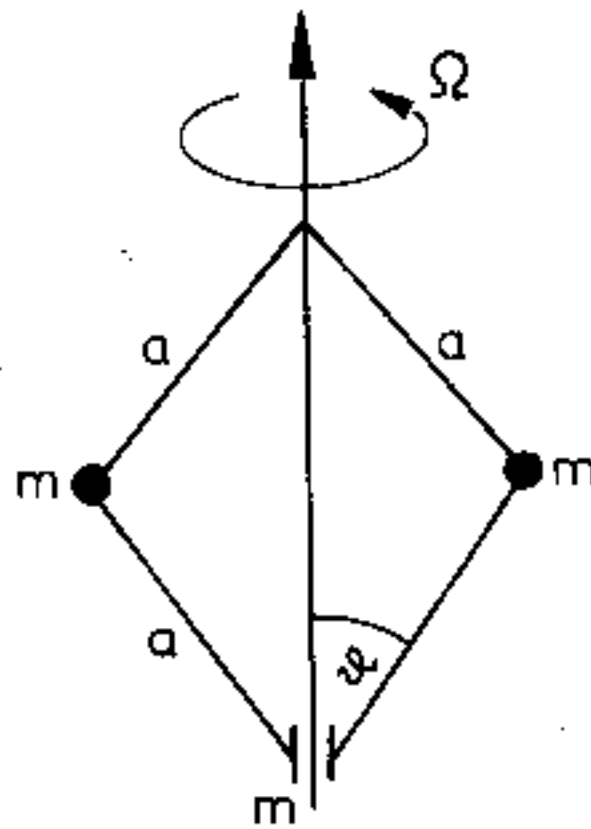
Ha a megoldást $x(t) = \int_0^t F(t')G(t', t) dt'$ alakba írjuk, az itt megjelenő $G(t', t)$ függvényt a rendszer *válaszfüggvényének* nevezzük. Határozzuk meg az oszcillátor $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$ kezdeti feltételeknek megfelelő válaszfüggvényét!

- 10.17.** Határozzuk meg a $-\alpha\dot{x}$ súrlódással csillapított oszcillátor $x(0)=\dot{x}(0)=0$ kezdeti feltételnek megfelelő válaszfüggvényét!
- 10.18.** Írjuk fel a mozgásegyenletek megoldásait $F(t)$ erő jelenlétében
- az $\ddot{x} - \mu^2 x = \frac{1}{m} F(t)$ egyenlettel jellemzett instabil rendszerre és
 - az $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t)$ egyenlettel jellemzett súrlódásos oszcillátorra!
- 10.19.** Egy lineáris oszcillátor E energiával rezeg. Mekkora a kinetikus és a potenciális energia átlagértéke?
- 10.20.** Határozzuk meg, mekkora E energiát vesz fel végtelen idő alatt ($t = +\infty$) az oszcillátor az $F(t) = F_0 e^{-(t/\tau)^2}$ erő hatására, ha kezdetben ($t = -\infty$)
- az oszcillátor nyugalomban volt,
 - a rezgés amplitúdója a volt?
- 10.21.** Az M tömegű test súrlódás nélkül mozoghat a vízszintes AB tengely mentén, melynek végeihez egyenlő k direkciós erejű rugókkal van erősítve. Mekkora az M tömeg kis rezgéseinek frekvenciája, ha az AB tengelyt ω szögsebességgel forgatjuk a középpontján átmenő függőleges egyenes körül?
- 10.22.** Írjuk le az alábbi rendszer rezgéseit, ha az m tömeg függőlegesen mozoghat! Hogyan függ a rezgés frekvenciája a rugók egyensúlyi állapotbeli feszültségétől? (A nehézségi erőt hanyagoljuk el!)

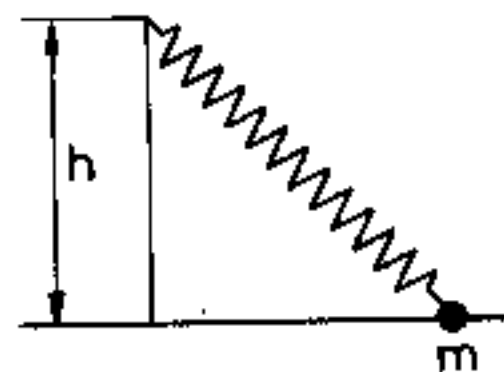


- 10.23.** Határozzuk meg az alábbi rendszer kis rezgéseinek frekvenciáját! A rendszer nehézségi erőterben, függőleges tengely körül

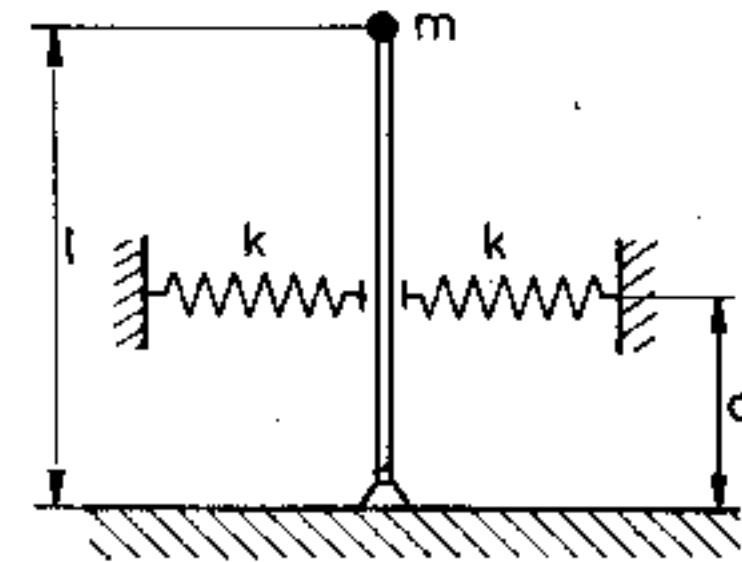
állandó Ω szögsebességgel forog. (Az a hosszúságú rudak végén súrlódásmentes csuklók vannak, és a rudak tömege elhanyagolhatóan kicsi.)



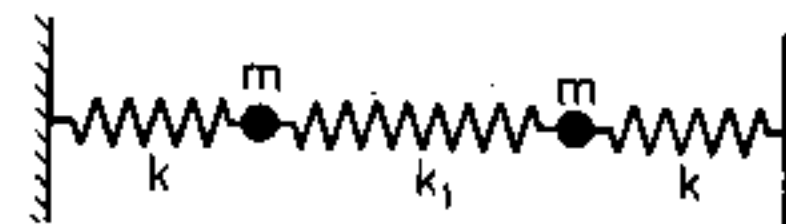
- 10.24. Határozzuk meg annak az ingának mozgását, melynek felfüggesztési pontja γ ($> \sqrt{g/l}$) frekvenciájú függőleges rezgéseket végez! Hol lesz az egyensúlyi helyzet?
- 10.25. Határozzuk meg a nehézségi erőterben csúcsával lefelé álló, α félnyílásszögű kúp felső felületén mozgó m tömegű részecske körpálya körüli kis rezgéseinek frekvenciáját!
- 10.26. Határozzuk meg a 11.28. feladatban leírt rendszer stacionárius állapotai körüli kis rezgéseket. Diskutáljuk az $\omega_{kr} = \sqrt{g/R}$ kritikus szögsebesség környékén tapasztalható viselkedést!
- 10.27. Az ábrán látható m tömegű test a vízszintes rúdon súrlódás nélkül mozoghat. A hozzá kapcsolódó rugó másik végpontját a rúdtól h távolságra rögzítjük. A rugó nyugalmi hossza l , sajátfrekvenciája ω_0^2 . Határozzuk meg az egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések frekvenciáját különböző h távolságok esetén!



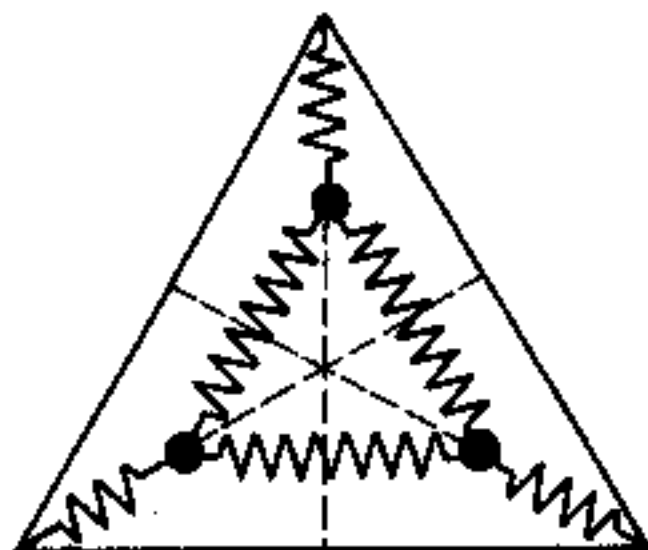
- 10.28. l hosszúságú súlytalan rúd alsó végét csuklóval a talajhoz rögzítjük, s a rudat mindkét oldalon k direkciós erejű, egyformán összenyomott, egyenes rugóval támasztjuk ki, melyek a csuklótól d távolságra érintkeznek a rúddal. A csukló csak a rúd és a rugók által meghatározott síkban való mozgást enged meg. A rúd másik végére m tömegű testet helyezünk. Határozzuk meg a stabil egyensúlyi helyzetet különböző terhelések esetén, valamint a kis rezgések frekvenciáját!



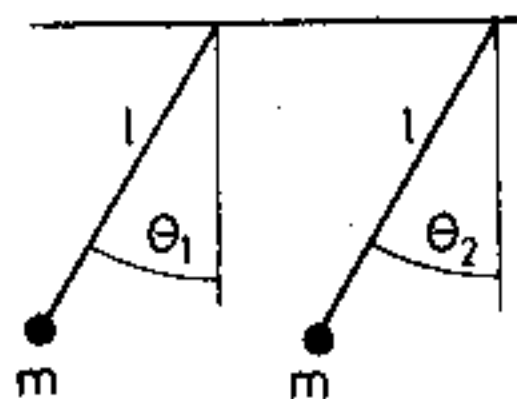
- 10.29. Egy kétatomos molekulának 6 szabadsági foka van. Hány sajátfrekvenciája van a rendszernek? Rajzoljuk fel az esetekhez tartozó mozgásokat! Bontsunk fel egy másfajta mozgást (pl. az első test balra mozdul el, a második fölfelé) a fentiek összegére! (Mindenholt csak kis elmozdulásokra szorítkozzunk!)
- 10.30. Hány sajátfrekvenciája van egy háromatomos molekulának? Milyen mozgások tartoznak ezekhez?
- 10.31. Írjuk le az ábrán látható rendszer kis amplitúdójú mozgását, ha a kezdőpillanatban
- az egyik tömeg sebessége v , a másiké 0, és mindkettő a nyugalmi helyzetből indul;
 - az egyik tömeg kitérése a nyugalmi helyzettől a , a másiké 0, és mindkettő sebessége 0!
- Határozzuk meg mindkét esetben az egyik tömegpontról a másikra irányuló energiaáramot! (A tömegpontok csak az őket összekötő egyenes mentén mozoghatnak.)



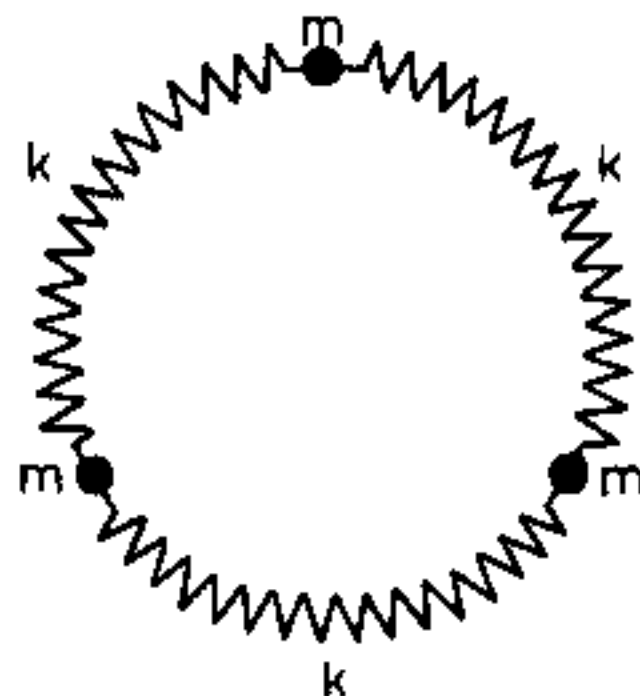
- 10.32. Határozzuk meg a következő rendszer sajátfrekvenciáit, ha a részecskék csak a szaggatott vonal mentén mozoghatnak. Mindegyik test tömege m , a rugóállandók mindegyike k . Nyugalmi helyzetben a részecskék egy szabályos háromszög csúcsain vannak.



- 10.33. Írjuk le két csatolt inga mozgását! Az ingák közötti csatolást a potenciális energiában megjelenő $\varepsilon\theta_1\theta_2$ ($\varepsilon > 0$) taggal vesszük figyelembe. Honnan eredhet ez a tag? A számolásban tegyük föl, hogy $\varepsilon \ll 1$.

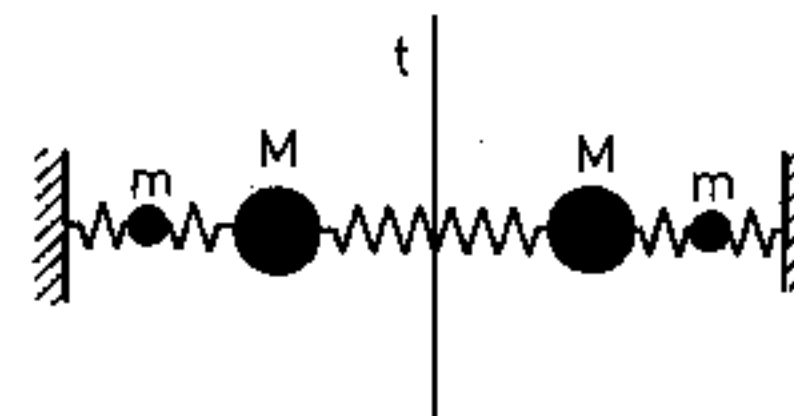


- 10.34. Egy kör mentén három, m tömegű test mozoghat. A testeket egyforma rugók kötik egymáshoz a kör mentén. Mekkora a rendszer sajátfrekvenciái és milyen mozgások tartoznak ezekhez?



- 10.35. Határozzuk meg az ábrán látható rendszer kis amplitúdójú transzverzális rezgéseinek sajátfrekvenciáit! (A tömegpontok egymástól és a falaktól azonos, d távolságban vannak, a rugók egyformák és nyugalmi állapotban (F) erő feszíti őket.) Rajzoljuk fel $m=M$ esetben a különböző normálmódusok legnagyobb kitéréshez tartozó elrendeződését!

Útmutatás: Használjuk ki, hogy a rendszer dinamikáját leíró A mátrix felcserélhető a t tengelyre tükröző I mátrixszal és emiatt kereshetjük közös sajátvektoraikat!



- 10.36. Három, azonos tömegű testet három egyforma rugóval kapcsolunk össze. Határozzuk meg a rendszer kis amplitúdójú síkbeli rezgéseinek sajátfrekvenciáit és normálkoordinátáit! Útmutatás: Használjuk ki a rendszer szimmetriáit!

- 10.37. Egy ω_0 frekvenciájú oszcillátorra a sebességgel ellentétes irányú, de állandó nagyságú súrlódási erő hat, tehát a mozgásegyenlet:

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{m|\dot{x}|} F_0 + \omega_0^2 x = 0.$$

Határozzuk meg, milyen görbét ír le a rendszer a fázistérben

a) ha $F_0 = 0$ (csillapítatlan mozgás),

b) ha $F_0 \neq 0$!

(A fázistér definíciója megtalálható Landau–Lifsic: Mechanika című könyvében. Esetünkben célszerű a keresett görbét x és \dot{x}/ω_0 függvényében ábrázolni.)

- 10.38. Elemezzük a súlytalan rúd végén levő tömegpontból álló inga fázisgörbéit, tetszőleges kitérés esetén!

10.39. A rugalmas rudat modellezhetjük a következő módon: N darab rugalmasan kötött, egyensúly esetén egymástól a távolságra levő m tömegű részecske, ahol $N \rightarrow \infty$ úgy, hogy $Nm = \text{állandó}$ és $Na = \text{állandó}$. Határozzuk meg a rúd rezgéseinek egyenletét a fenti diszkrét rendszer mozgásegyenletének határeseteként!

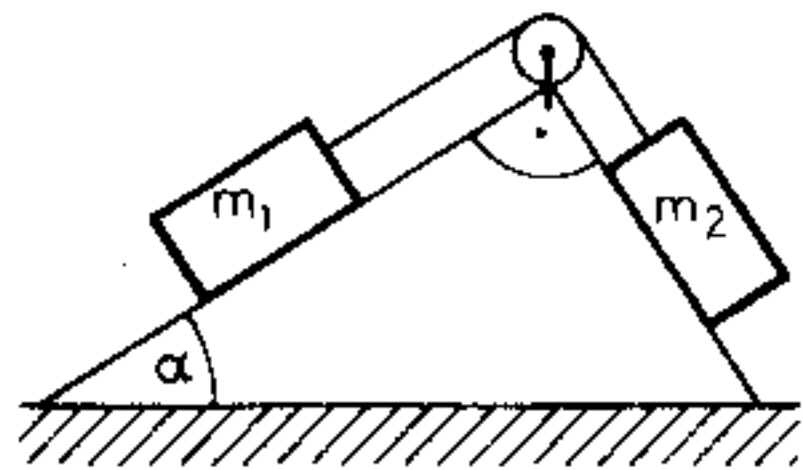
Útmutatás: Írjuk a rúd pontjainak koordinátáit $\xi = na$ alakba és vezessük be az $a \rightarrow 0$ határesetben kapható

$$x(\xi, t) = \lim x_n(t); \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \lim \frac{x_n(t) - x_{n-1}(t)}{a}$$

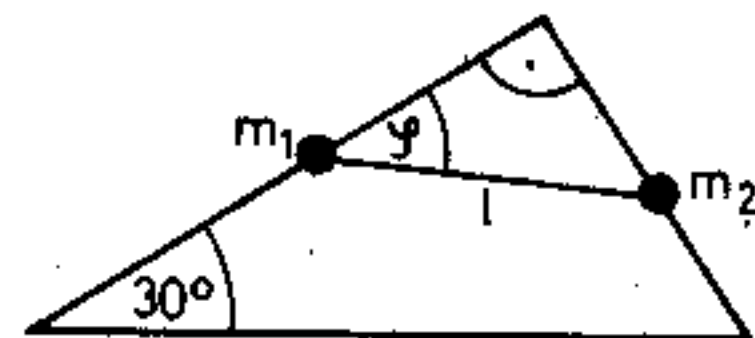
mennyiségeket, melyek a ξ koordinátájú pont elmozdulását jellemzik!

11.-A mechanika elvei

11.1. Az ábrán látható lejtő csúcsán elhelyezett csigán átvetett, elhanyagolható tömegű, nyújthatatlan fonal végeire m_1 és m_2 tömegű testeket akasztunk, melyek a lejtőkön súrlódásmentesen mozoghatnak. Milyen α szögnél lesz a rendszer egyensúlyban? Írjuk le a mozgást, ha α értéke különbözik az előző értéktől! Mekkora erő feszíti a kötelet a két esetben?

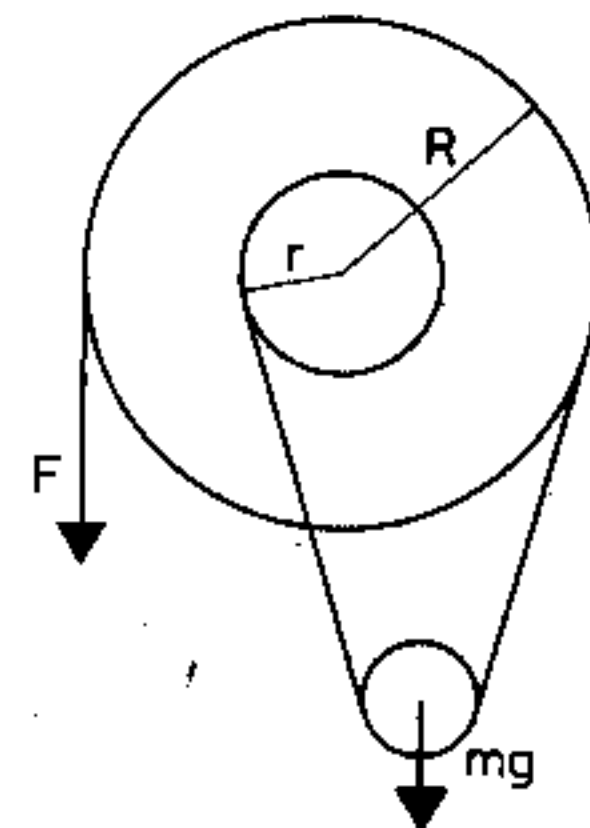


11.2. Az ábrán látható, drótból készült háromszögkeret függőleges síkban áll. A két befogóra m_1 , illetve m_2 tömegű golyókat húzunk, melyeket l hosszúságú kötéll köt össze. Keressük meg az

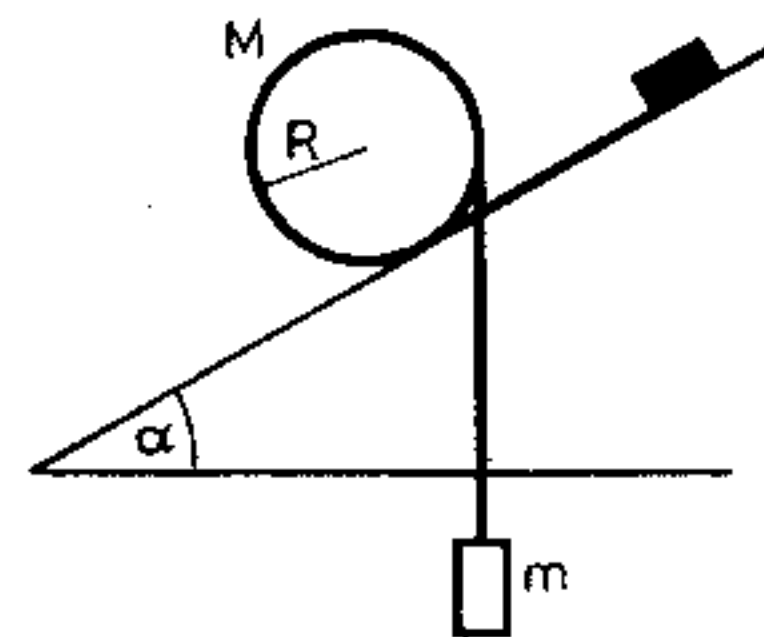


egyensúlyi helyzetet és határozzuk meg ebben a helyzetben a kötélerőt! (A súrlódástól tekintünk el!)

11.3. Az ábrán látható hengerkeréken mg súlyú teher függ. Mekkora F erővel lehet az egyensúlyt fenntartani? Írjuk fel a mozgásegyenleteket, ha F értéke ettől különböző! (A hengerkeréken a kötéll tapad, és a tehernél levő csiga tömege elhanyagolható!)



11.4. M tömegű, R sugarú hengerre tekert nyújthatatlan kötéll egyik végét α hajlásszögű lejtőn rögzítjük, másik végére az ábra szerint m tömegű testet akasztunk. Mekkora α szög esetén lesz a rendszer egyensúlyban? (A kötéll nem csúszik meg a hengeren!)



11.5. m tömegű test egy vízszintes, R sugarú félkör alakú vályúban csúszik (súrlódás nélkül). Mekkora erővel nyomja a vályút pályájának legalsó pontján?

11.6. Nehézségi erőterben csúcsára állított 2α nyílásszögű kúp belső felületén egy tömegpontnak vízszintes, az alkotóra merőleges v_0 kezdősebességet adunk. Mekkora kell ezt a sebességet választani ahhoz, hogy a tömegpont ebben a magasságban egyenletes körmozgást végezzen a kúp belsejében? Mekkora erővel nyomja mozgása során a kúp felületét? (Súrlódás nincs!)

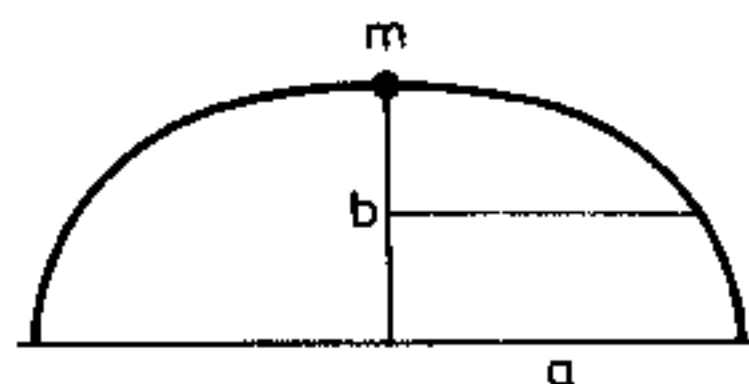
11.7. Mekkora kell a 11.6. feladatban szereplő v_0 sebességet választani ahhoz, hogy a test pályájának legmélyebb pontja $l/2$ legyen?

11.8. Milyen annak a pohárnak az alakja, amelynek belső felületén a vízszintes v_0 sebességgel ellökött pontszerű test vízszintes körpályán mozog, függetlenül attól, hogy milyen magasságban indították?

11.9. Síugró indul az $y = ax^2$ egyenletű sisánc h magasságú pontjából, kezdősebesség nélkül. Határozzuk meg, hogy mekkora erővel nyomja mozgása során a sáncot! (A súrlódástól tekintünk el!)

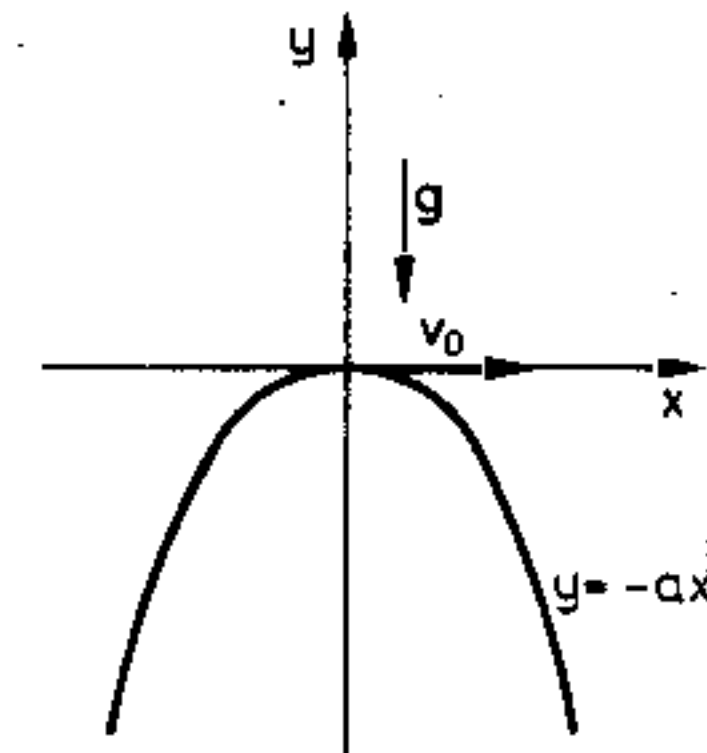
11.10. R sugarú gömbfelület tetejéről m tömegű test csúszik le a nehézségi erő hatására. A súrlódás elhanyagolható. Határozzuk meg, hogy mekkora erővel nyomja a test a gömböt mozgása során, valamint azt, hogy hol fog elválni a gömbfelülettől!

11.11. m tömegű test a és b tengelyű ellipszis keresztmetszetű domb tetejéről elhanyagolhatóan kis kezdősebességgel indul. Mekkora legyen az a/b arány ahhoz, hogy $b/2$ magasságban váljon el a felülettől?



11.12. Egy síelő súrlódás nélkül csúszik le az $y^2 = 2px$ egyenletű lejtőn. Határozzuk meg, hogy hol válik el a lejtőtől, ha az (x_0, y_0) pontból elhanyagolható sebességgel indult el!

11.13. v_0 vízszintes kezdősebességgel indítunk egy testet az $y = -ax^2$ parabola csúcsáról ($a > 0$). Határozzuk meg, hogy hol válik el a test a parabolától!

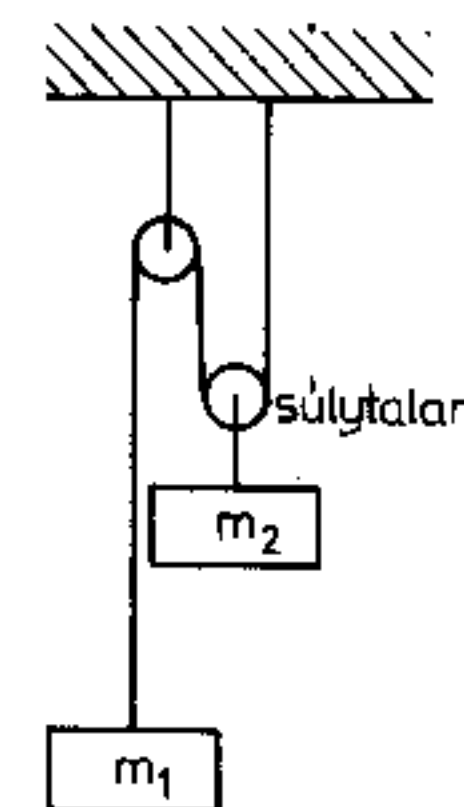


11.14. v_0 vízszintes sebességgel indítunk egy testet az R sugarú félgömb tetejéről. Hol fog a test a gömbtől elválni?

11.15. Írjuk fel a szabadon eső m tömegű test Lagrange-függvényét és keressük meg a megmaradó mennyiségeket!

11.16. M_2 tömegű test vízszintes síkon mozoghat súrlódás nélkül. l hosszúságú nyújthatatlan fonál segítségével M_1 tömegű testet kötünk hozzá úgy, hogy a fonalat egy súrlódásmentesen forgó csigán átvetjük és így M_1 függőlegesen mozoghat. Írjuk fel a rendszer Lagrange-függvényét és a mozgásegyenleteket!

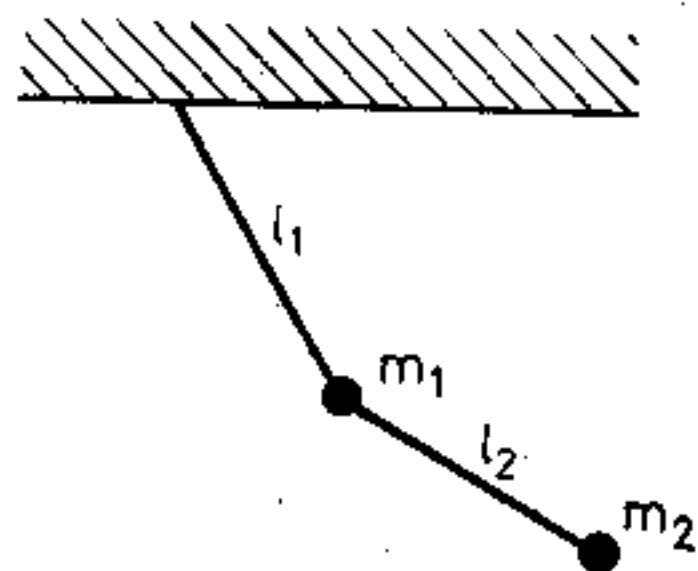
11.17. Határozzuk meg az ábrán látható rendszer Lagrange-függvényét! Írjuk fel a mozgásegyenleteket!



11.18. Írjuk fel a gravitációs potenciálban mozgó tömegpont Lagrange-függvényét! Keressük meg a ciklikus változókat és a nekik megfelelő megmaradó mennyiségeket!

11.19. Adjuk meg a következő rendszerek Lagrange-függvényeit, és írjuk fel a mozgásegyenleteket! Keressük meg a ciklikus változókat!

- a) gömbinga (m tömeg, l kötélnhossz);
 b) kettős inga;

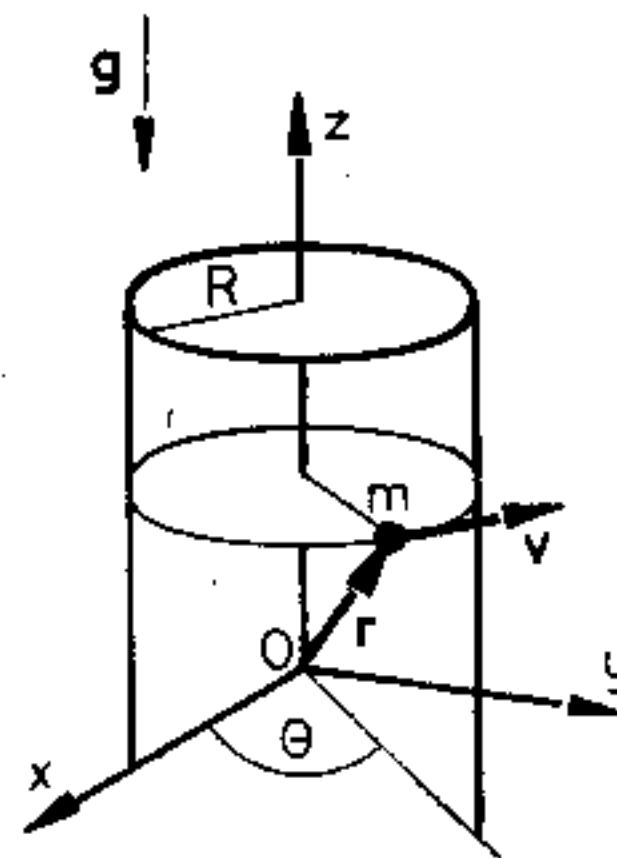


c) m_1 és m_2 tömegű testek k direkciós állandójú rugóval összekötve, amelyek csak vízszintesen mozoghatnak.

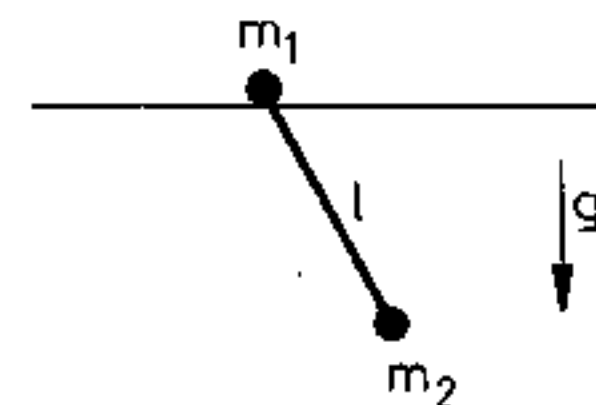
(Vezessünk be olyan általános koordinátákat, amelyek jól „illeszkednek” a feladathoz!)

11.20. Nehézségi erőterben csúcsával lefelé álló 2α nyílásszögű kúp belső felületén m tömegű test mozog súrlódás nélkül. Írjuk fel a Lagrange-függvényt, és keressük meg a megmaradó mennyiségeket! Keressük meg a stacionárius mozgás feltételét!

11.21. m tömegű test mozog a nehézségi erőterben függőlegesen álló R sugarú henger külső felületén úgy, hogy a henger tengelyén levő O pontból $F = -kr$ erő hat rá. A mozgást z_0 magasságban vízszintes, érintő irányú v sebességgel indítjuk ($t=0$). Írjuk le a mozgást!

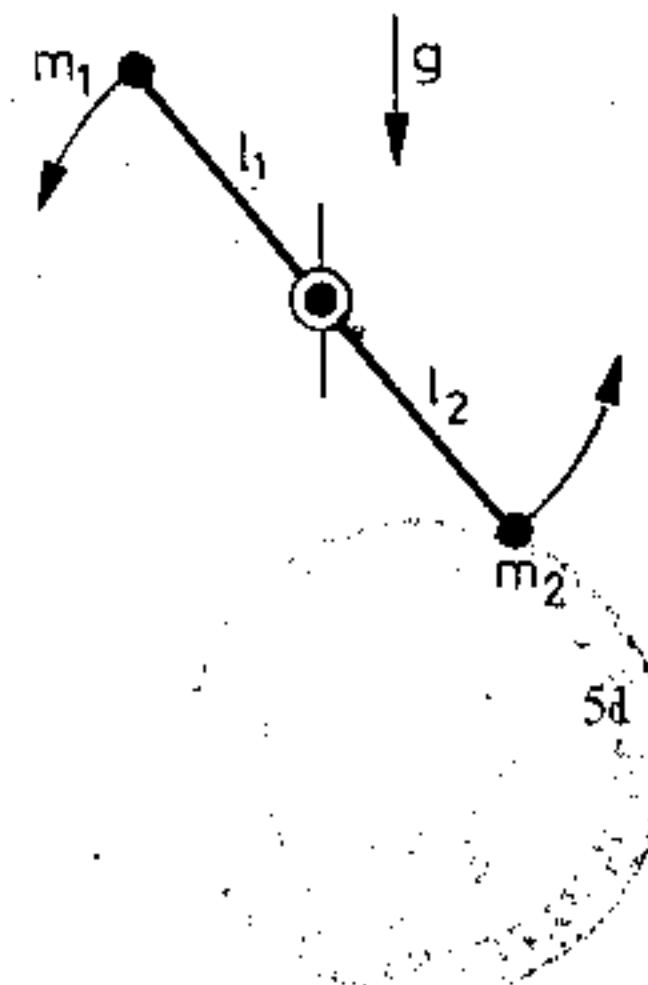


11.22. Határozzuk meg a következő rendszer Lagrange-függvényét: síkinga, melynek felfüggesztési pontja vízszintesen mozoghat. Írjuk fel a mozgásegyenleteket és keressük meg az egyensúlyi helyzetet! Határozzuk meg az egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések frekvenciáját!



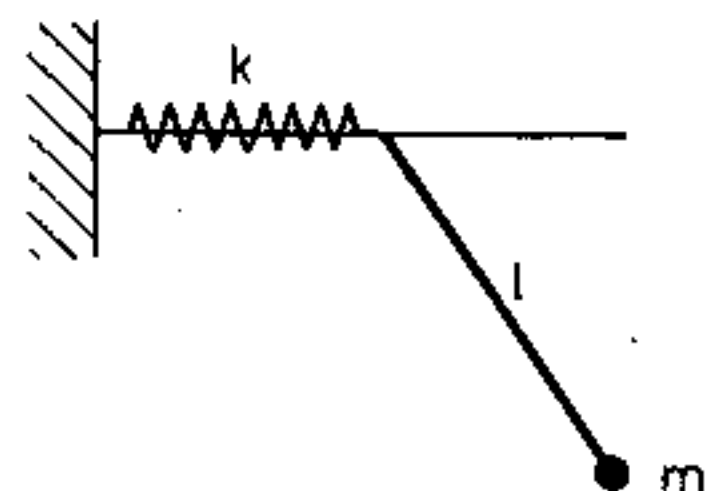
11.23. Oldjuk meg az előző feladatot abban az esetben, ha az m_1 tömegű pont adott $x_1(t)$ mozgást végez a vízszintes egyenes mentén! Megmarad-e a rendszer energiája?

11.24. Vízszintes tengely egy elhanyagolható tömegű rudat l_1 és l_2 hosszúságú részekre oszt. A rúd végeire m_1 , ill. m_2 tömeget ragasztunk. A rúd a vízszintes tengely körül függőlegesen, egyetlen síkban mozoghat. Írjuk fel a mozgásegyenletet és keressük meg az egyensúlyi helyzeteket! Melyik egyensúlyi helyzet lesz stabil?

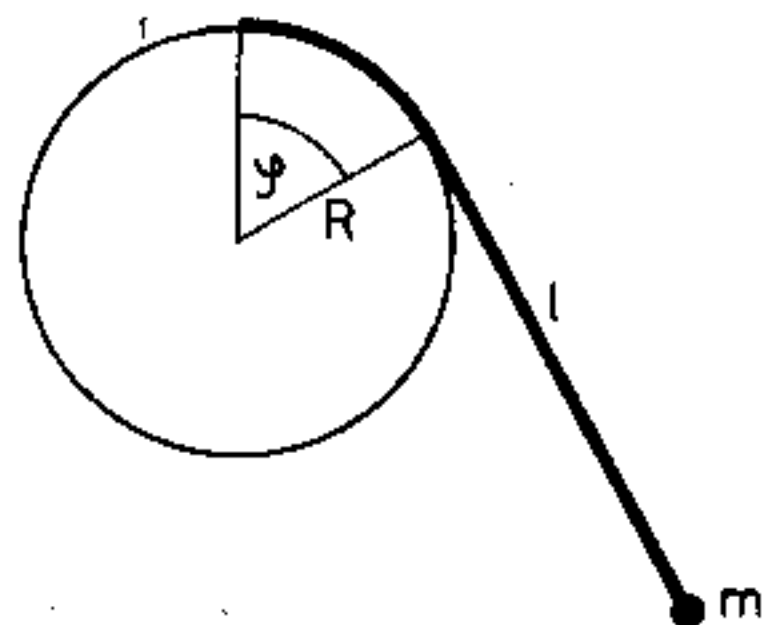


11.25. Egy m tömegű pontszerű testet rugalmas gumiszálra akasztunk. A gumiszál hossza feszültségmentes állapotban l_0 , direkciós állandója k . Írjuk fel ennek az ingának a mozgásegyenleteit!

11.26. l hosszúságú, m tömegű fonálinga felfüggesztési pontja k direkciós állandójú rugóhoz van rögzítve. A felfüggesztési pont vízszintesen mozoghat. Határozzuk meg az egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések frekvenciáját és a Lagrange-függvényt!

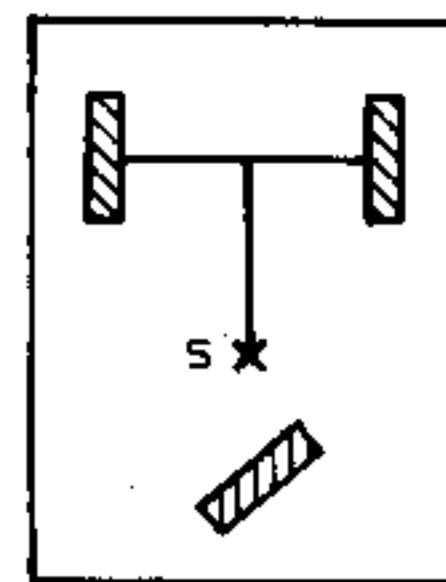


11.27. l hosszúságú nyújthatatlan fonal egyik végét R sugarú, függőleges síkban álló rögzített korong tetején rögzítjük. Másik végére m tömegű testet akasztunk. Írjuk fel a rendszer mozgásegyenletét és határozzuk meg az egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések frekvenciáját!



11.28. R sugarú drótkeret ω szögsebességgel forog függőleges átmérője körül. A drótkeretre m tömegű, súrlódás nélkül mozgó testet fűznek fel. Írjuk fel m Lagrange-függvényét és keressük meg az egyensúlyi helyzeteket!

11.29. Egy Θ tehetetlenségi nyomatékú (súlypontra vonatkoztatva), m tömegű kis kocsi súlypontja s távolságra van a tengely felezőpontjától. A tengelyen két kerék szabadon forog. A kocsi felbillenését a harmadik, önbeálló kerék akadályozza meg. Hogyan mozog a kocsi vízszintes talajon?



11.30. Írjuk fel az egydimenziós harmonikus oszcillátor Hamilton-függvényét és a kanonikus egyenleteket!

11.31. M_2 tömegű test vízszintes síkon mozoghat súrlódás nélkül. l hosszúságú nyújthatatlan fonal segítségével M_1 tömegű testet erősítünk hozzá úgy, hogy a fonalat egy súrlódásmentesen forogó csigán átvetjük és így M_1 függőlegesen mozoghat. Írjuk fel a rendszer Hamilton-függvényét és a kanonikus egyenleteket. Ez utóbbiakat oldjuk is meg!

11.32. Írjuk fel a Hamilton-függvényt, a kanonikus egyenleteket és az egyenletek megoldását a 11.17. feladatban szereplő rendszerre!

11.33. Írjuk fel a Hamilton-függvényt, a kanonikus egyenleteket és az egyenletek megoldását a 11.21. feladatban szereplő rendszerre!

11.34. Határozzuk meg a 11.28. feladatban leírt rendszer Hamilton-függvényét, és a potenciális energia ismeretében vizsgáljuk meg az $\omega_{kr} = \sqrt{g/R}$ kritikus szögsebesség környékén a stacionárius helyzeteket, s azok stabilitását!

11.35. Az egydimenziós harmonikus oszcillátorra $A \sin(\omega t)$ gerjesztő erő hat. Írjuk fel a Lagrange-függvényt, határozzuk meg a kanonikus impulzust és a Hamilton-függvényt! Mozgásállandó-e a Hamilton-függvény?

- 11.36. Bizonyítsuk be, hogy a $-\alpha\dot{x}$ súrlódással csillapodó harmonikus oszcillátor Lagrange-függvénye

$$L = \frac{1}{2} e^{\frac{\alpha}{m}t} \left[\dot{x}^2 + \frac{\alpha}{m} x\dot{x} + \left(\frac{\alpha^2}{2m^2} - \frac{k}{m} \right) x^2 \right]$$

(k a rugóállandó). Keressük meg a kanonikus impulzust és a Hamilton-függvényt!

- 11.37. Mutassuk meg, hogy ha a Lagrange-függvény a dinamikai változókon (q, \dot{q}) kívül még a rendszert jellemző λ paramétertől is függ, akkor

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{p, q} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_{q, \dot{q}}$$

- 11.38. Ha e töltésű m tömegű testet elektromágneses térbe helyezünk, akkor

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

Lorentz-erő hat rá. Mutassuk meg, hogy mozgásának Lagrange-függvénye $L = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + \frac{e}{c} \mathbf{v}\mathbf{A} - e\Phi$ alakú! (\mathbf{A} és Φ az

elektromágneses tér vektor, illetve skalárpotenciálja:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad \mathbf{A} \text{ és } \Phi \text{ kielégítik a}$$

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \text{ Lorentz-feltételt is.) Határozzuk meg a ka-}$$

nonikus impulzusokat és a Hamilton-függvényt!

- 11.39. Vizsgáljuk az e töltésű inga mozgását függőleges mágneses térben, kis kitérésekre korlátozódva! Adjuk meg a pályát abban az esetben, amikor az ingát a legmélyebb pontból adott kezdősebességgel indítjuk el!

- 11.40. Határozzuk meg egy tömegpont \mathbf{r} helyvektora, \mathbf{p} impulzusa és $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ impulzuszómomentum komponenseinek következő Poisson-zárójelét!

$$\{x_i, p_j\}; \quad \{x_i, J_l\}; \quad \{p_i, J_l\}; \quad \{J_i, J_k\}.$$

- 11.41. Bizonyítsuk be, hogy ha f csak a q koordináta és p impulzus függvénye: $f = f(q(t), p(t))$, akkor

$$f(q(t), p(t)) = f_0 + \frac{t}{1!} \{H, f_0\} + \frac{t^2}{2!} \{H, \{H, f_0\}\} + \\ + \frac{t^3}{3!} \{H, \{H, \{H, f_0\}\}\} + \dots$$

Itt $f_0 = f(q(0), p(0))$, $H = H(q(0), p(0))$. Használjuk ezeket az összefüggéseket az állandó \mathbf{F} erő hatása alatt mozgó m tömegű test $\mathbf{p}(t)$ impulzusának és $\mathbf{q}(t)$ helyének meghatározására!

- 11.42. Határozzuk meg az $F(q, Q, t) = qQ$ alkotófüggvénnyel leírt kanonikus transzformációt! Milyen lesz az új Hamilton-függ-

$$\text{vény } H'(P, Q), \text{ ha } H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2?$$

- 11.43. Milyen transzformációt írunk le a következő alkotó függvények:

a)

$$\Phi(q, P, t) = \sum_k q_k P_k;$$

b)

$$\Phi(q, P, t) = \sum_k c_k(t) q_k P_k.$$

- 11.44. Határozzuk meg az $F(q, Q, t) = \frac{1}{2} m\omega(t)q^2 \text{ctg } Q$ alkotófügg-

vénnyel leírt kanonikus transzformációt! Alkalmazzuk ezt egy olyan harmonikus oszcillátorra, melynek körfrekvenciája $\omega(t)$ szerint változik, és írjuk fel a kanonikus egyenleteket! Az $\omega(t) = \omega_0$ esetben (állandó frekvencia) oldjuk is meg a kapott egyenleteket!

- 11.45. Alkalmazzuk az $F(x, X, t) = -xX \exp\left(\frac{\alpha}{2m}t\right)$ alkotófüggvénnyel leírt kanonikus transzformációt a $-\alpha\dot{x}$ csillapítással csillapodó oszcillátorra! Írjuk fel és oldjuk meg az új kanonikus egyenleteket! (Lásd a 11.36. feladatot!)

11.46. Mutassuk meg, hogy az

$$x = X \cos \lambda + \frac{P_y}{m\omega} \sin \lambda, \quad y = Y \cos \lambda + \frac{P_x}{m\omega} \sin \lambda,$$

$$p_y = -m\omega X \sin \lambda + P_y \cos \lambda \quad p_x = -m\omega Y \sin \lambda + P_x \cos \lambda$$

transzformáció kanonikus! Határozzuk meg az új Hamilton-függvényt, ha a régi

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

(izotrop oszcillátor)!

11.47. Anharmonikus rezgőmozgást végző test kis rezgéseinak Hamilton-függvénye

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 + \beta x p^2; \quad |\alpha x| \ll \omega^2, \quad \beta x \ll 1.$$

Az alkotófüggvényt $\Phi = xP + ax^2P + bP^3$ alakban felvéve határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy az új Hamilton-függvényben harmadrendű tagok ne lépjenek fel! A negyed- és magasabbrendű tagokat elhanyagolva, írjunk fel egy közelítő megoldást az eredeti változókra!

11.48. Szabadon eső test t_0 idő alatt y_0 -ból y_1 -be jut. Írjuk fel a hatást mint y_0, y_1 és t_0 függvényét és mutassuk meg, hogy $\frac{\partial S}{\partial t_0} = -E!$

11.49. Mutassuk meg közvetlen behelyettesítéssel, hogy az előző feladatban kapott $S(y_0, y_1, t_0)$ függvény kielégíti a

$$\frac{\partial S}{\partial t_0} + H\left(y_1, \frac{\partial S}{\partial y_1}, t_0\right) = 0$$

Hamilton-Jacobi-egyenletet!

11.50. Harmonikus rezgőmozgást végző test τ idő alatt az $x=x_0$ pontból az $x=x_1$ pontba jut. Írjuk fel a hatást mint x_0, x_1, τ függvényét és mutassuk meg, hogy $\frac{\partial S}{\partial \tau} = -E!$

11.51. Mutassuk meg közvetlen számolással, hogy az előző feladatban kapott $S(x_0, x_1, \tau)$ függvény kielégíti a

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x_1, \frac{\partial S}{\partial x_1}, t\right) = 0$$

Hamilton-Jacobi-egyenletet!

11.52. Határozzuk meg az S hatásfüggvényt a Hamilton-Jacobi-egyenlet megoldásával az E energiával rezgő harmonikus oszcillátorra!

Útmutatás: Használjuk fel, hogy konzervatív rendszer esetében

$$S(q, t) = S_0(q) - Et \quad \text{és} \quad H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}, q\right) = E!$$

Mutassuk meg, hogy $\frac{\partial S_0}{\partial E} = t!$

11.53. Határozzuk meg a bolygómozgás pályáját a Hamilton-Jacobi-egyenlet megoldásával!

11.54. Az m tömegű tömegpont egy egyenes szakasz mentén az $x=-a$ és $x=a$ helyen elhelyezett falak között szabadon mozoghat. Határozzuk meg a fázisgörbét adott kezdeti feltétel esetén! Hogyan módosul a fázisgörbe, ha a falnak ütközés nem teljesen rugalmas? Az ütközési együttható legyen $\varepsilon < 1!$

11.55. A h magasságból elejtett m tömegű golyó rugalmasan pattog a vízszintes síkon. Határozzuk meg a fázisgörbét!

11.56. Hogyan módosul az előző feladatban szereplő golyó fázisgörbéje, ha a h magasságból v_0 kezdősebességgel indítjuk, s ugyan-ezen a szinten vízszintes rugalmas falat is elhelyeztünk?

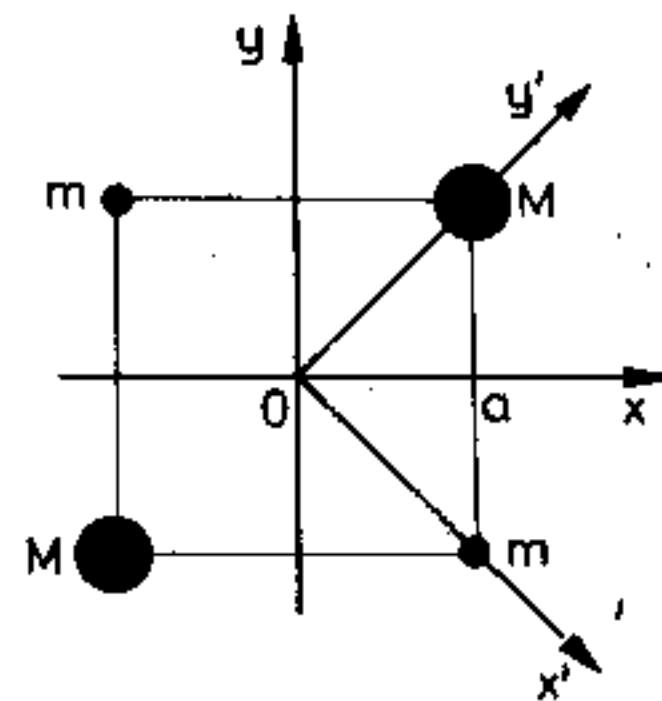
11.57. Határozzuk meg az m tömegű ω frekvenciájú oszcillátor fázisgörbét, ha kezdetben az $x=q_0, v=p_0/m$ állapotban van!

11.58. Határozzuk meg az l hosszúságú, rugalmas falú dobozba zárt p_0 impulzusú m tömegű részecske mozgására az $I = \oint p dq$ mennyiséget (a \oint egy periódusra vett integrálást jelent)! Mutassuk meg, hogy amennyiben az egyik fal lassan, $u \ll p_0/m$ sebességgel távolodik, az I mennyiség állandó marad (adiabati-kus invariáns).

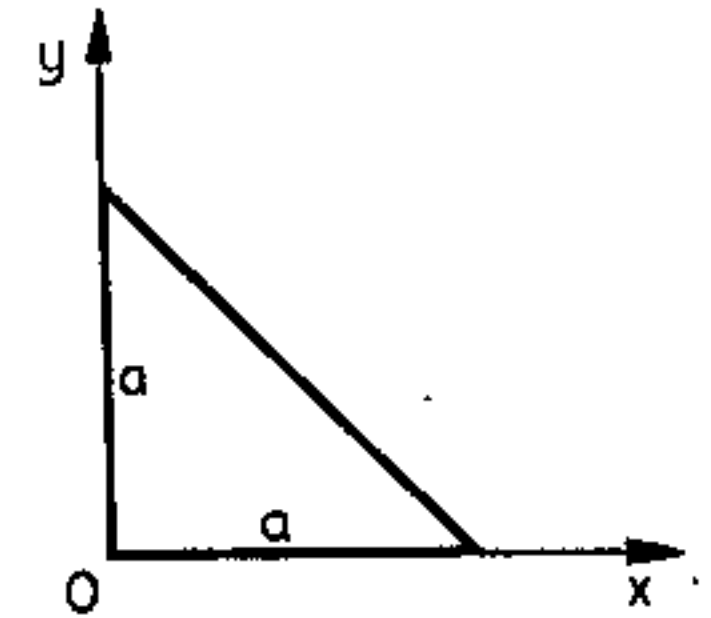
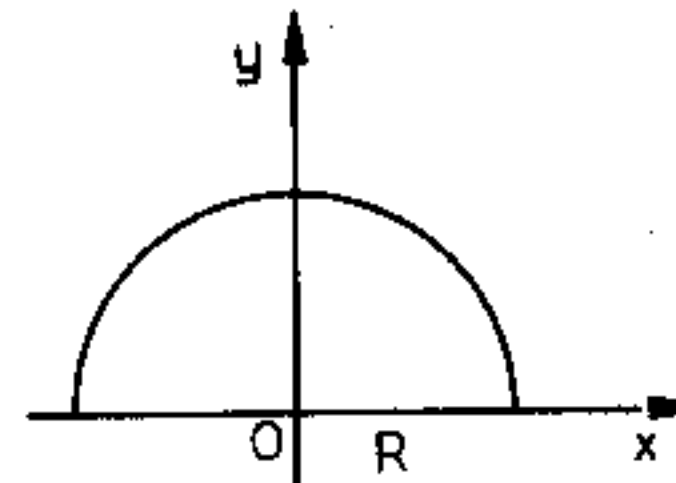
- 11.59. Egy tökéletesen rugalmas labda pattog egy olyan liftben, melynek gyorsulása lassan növekszik. Hogyan változik a labda felpattanásának magassága a pillanatnyi gyorsulás függvényében?
- 11.60. Hogyan változik a harmonikus oszcillátor energiája, ha a frekvenciát lassan változtatjuk?
- 11.61. Matematikai inga hossza az idővel lineárisan növekszik. Az egy periódus alatti növekedés kicsi az inga hosszához képest. Hogyan függ a maximális kitérés az inga pillanatnyi hosszától?
- 11.62. Vízszintes síkon R sugarú kör mentén zsinórra kötött m tömegű test mozog egyenletesen (a súrlódástól tekintünk el). Hogyan változik m energiája, ha a kör középpontjában levő kicsiny lyukon keresztül a zsinór hosszát lassan csökkentjük?
- 11.63. m tömegű részecske a oldalélű kocka belsejében szabadon mozoghat; a falakról rugalmasan verődik vissza. Hogyan változik a részecske energiája, ha a kocka éle lassan nő? (Használjuk az adiabatikus invariánsok fogalmát!) Kapcsolatba hozható-e ez az összefüggés az egyatomos ideális gáz adiabatikus állapotváltozását leíró $pV^{5/3} = \text{állandó}$ egyenlettel?

12. Merev testek mozgása

- 12.1. Elhanyagolható tömegű rudakból összeállított $2a$ oldalélű négyzet csúcaiba m és M tömegeket helyeztünk az ábra szerint. Határozzuk meg a rendszer O pontra vonatkozó tehetetlenségi tenzorát a) az x, y, z ; b) az x', y', z koordináta-rendszerben! (A z tengely az ábra síkjára merőleges.)



- 12.2. Határozzuk meg egy l hosszúságú rúd tehetetlenségi nyomatékát a súlypontján, illetve a végpontján átmenő, a rúdra merőleges tengelyre vonatkozóan, ha a rúd
- homogén tömegeloszlású, tömege m ;
 - vonalmenti tömegeloszlása $\rho(x)$.
- 12.3. Határozzuk meg a következő síkrendszerek O pontra vonatkozó tehetetlenségi tenzorát (a felületi sűrűség egyenletes):
- félkörlap;
 - háromszög.



- 12.4. Adjuk meg az előző példában szereplő testek fő tehetetlenségi nyomatékait és irányait!
- 12.5. A tehetetlenségi tenzorok ismeretében határozzuk meg a 12.3. feladatban szereplő rendszereknek az $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!
- 12.6. Mutassuk meg, hogy az xy síkban elhelyezkedő síkidom fő tehetetlenségi nyomatékaira fennáll a

$$\Theta_{xx} + \Theta_{yy} = \Theta_{zz}$$

egyenlőség.

- 12.7. Az alábbi mátrixok közül melyik lehet egy tehetetlenségi nyomaték tenzor reprezentációja valamilyen koordináta-rendszerben?

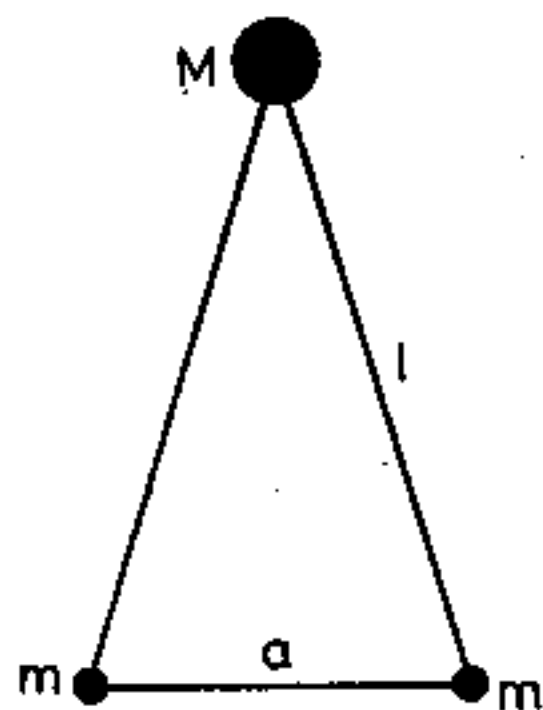
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

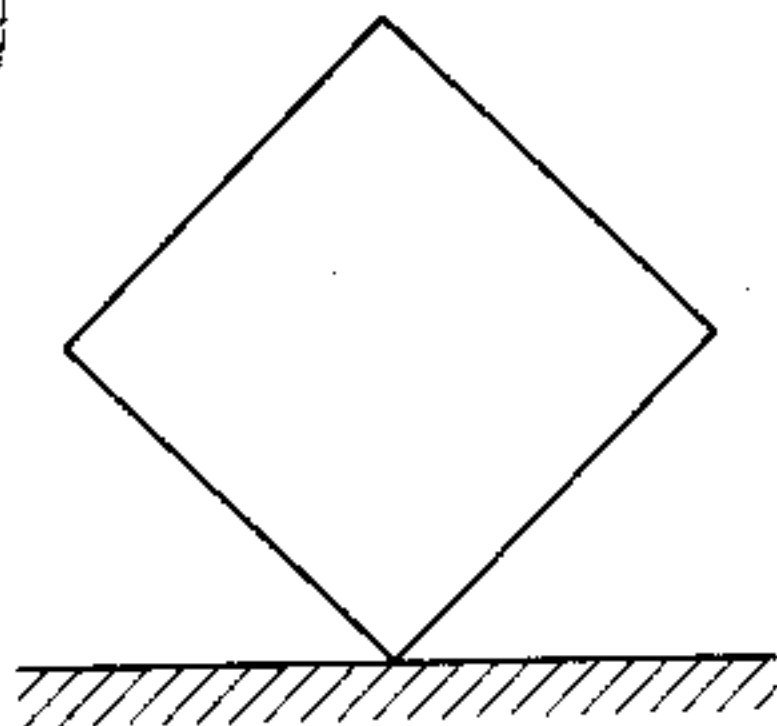
- 12.8.** Határozzuk meg egy homogén, a oldalélű kocka tehetetlenségi tenzorát egyik csúcsára vonatkozóan! (Válasszuk koordinátatengelyeknek a kocka éleinek irányát!) Melyek lesznek a fő tehetetlenségi irányok és a fő tehetetlenségi nyomatékok?
- 12.9.** Számítsuk ki egy kocka tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő tetszőleges irányú tengelyre!
- 12.10.** Számítsuk ki a következő testeknek a szimmetriatengelyükre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát:
a) gömb, b) kúp, c) henger, d) körlap, e) kocka, f) téglatest.
- 12.11.** Határozzuk meg a homogén, a, b, c oldalélű téglatest tehetetlenségi nyomatékát az egyik csúcson átmenő $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ irányú tengelyre!
- 12.12.** Mutassuk meg egyszerű megfontolások segítségével, hogy egy szabályos tetraédernek a tömegközéppontjára vonatkozó fő tehetetlenségi nyomatékaik egyenlők!
- 12.13.** Egy merev test egy rajta átmenő tengely körül forog. A tengely tartása közben mit érzékelünk a következő esetekben:
a) a tengely nem megy át a test tömegközéppontján, de párhuzamos az egyik fő tehetetlenségi tengellyel;
b) a tengely átmegy a tömegközépponton, de nem esik egybe egyik fő tehetetlenségi tengellyel sem;
c) a tengely átmegy a tömegközépponton és egybeesik valamelyik fő tehetetlenségi tengellyel.
- 12.14.** Határozzuk meg a H_2 , HD és D_2 molekulák tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékainak arányát, feltéve, hogy a kötéstávolság mindhárom esetben azonos!
- 12.15.** Határozzuk meg a vízmolekula tömegközépponti rendszerében a fő tehetetlenségi nyomatékokat, ha ismerjük az OH kötéstávolságot (d) és a kötésszöget (α).
- 12.16.** Határozzuk meg az m tömegű, R sugarú, h magasságú kúp tehetetlenségi nyomatékát egyik alkotójára vonatkoztatva!

- 12.17.** Egy merev, l hosszúságú és elhanyagolható tömegű rúd végeire M_1 és M_2 tömeget helyeznek. (M_1 és M_2 méretei l -hez képest elhanyagolhatóak.) A rudat reá merőleges tengely körül forgásba hozzák. A rúd mely pontján kell a tengelynek keresztül haladni ahhoz, hogy a rúd ω szögsebességgel való megforgatásához szükséges munka minimális legyen?
- 12.18.** m tömegű, homogén rudat az egyik végétől x távolságra levő, a rúdra merőleges tengely körül ω szögsebességgel forgatunk. Mekkora x esetén lesz a kinetikus energia minimális?
- 12.19.** Elhanyagolható tömegű rúd két végére m tömegű testeket erősítünk. Az így kapott súlyzót a súlypontján átmenő, a rúddal α szöget bezáró tengely körül ω szögsebességgel forgatjuk. Számítsuk ki
a) a súlyzó impulzusmomentumát;
b) a súlyzóra ható forgatónyomatékot;
c) a centrifugális erő forgatónyomatékát!
- 12.20.** Határozzuk meg az m tömegű, l hosszúságú rúd forgási energiáját, ha
a) a középpontján átmenő, a rúddal α szöget bezáró tengely körül forgatjuk;
b) az előzővel párhuzamos olyan tengely körül forgatunk, amely a súlyponttól d távolságban metszi a rudat.
- 12.21.** A 12.3. feladat rendszereit megforgatjuk az
a) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$; b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
tengelyek körül ω szögsebességgel. Határozzuk meg a forgási energiát és az impulzusnyomaték-vektort!
- 12.22.** m tömegű, R sugarú, elhanyagolható vastagságú homogén körlapot súlypontján átmenő tengelyre rögzítünk úgy, hogy a körlap síkja α szöget zárjon be a tengellyel. Határozzuk meg a körlap kinetikus energiáját, ha ω szögsebességgel forgatjuk a tengelyt!
- 12.23.** Egy létra tetejére egy M tömegű, két szárának másik végpontjaihoz egy-egy m tömegű testet erősítünk. (A létra szára elhanyagolható tömegű!) Mekkora sebességgel ér földet az M tö-



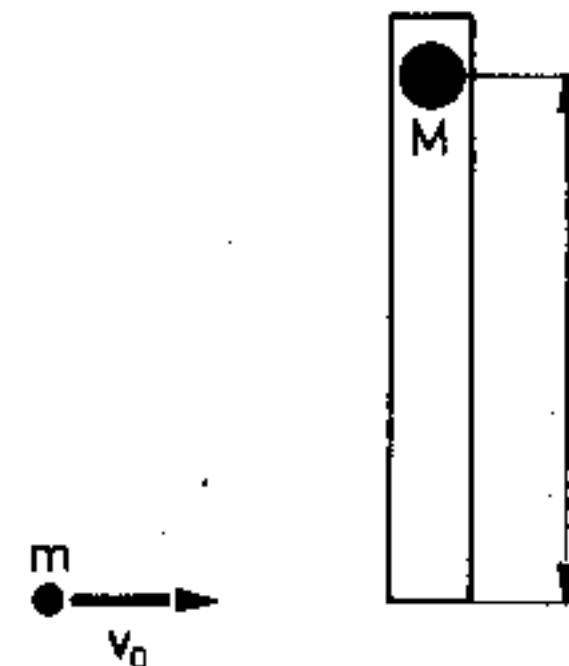
megű test, ha a létra szárait összekötő kötélszakad? Mekkora lesz ez a sebesség akkor, ha a létraszárak tömegét (egyenként M_2) nem lehet elhanyagolni?

- 12.24.** a oldalélű homogén kocka az ábrán látható instabil egyensúlyi helyzetben van. Felső csúcsát kicsit elmozdítjuk, és a kocka szabadon felborul. Mutassuk meg, hogy a kocka szögsebessége abban a pillanatban, amikor lapjával a vízszintes síkra ér, $\omega^2 = A \frac{g}{a} (\sqrt{2} - 1)$, ahol $A = \frac{3}{2}$, ha a kocka síkkal érintkező éle nem csúszik meg, és $A = \frac{12}{5}$, ha ez az él súrlódás nélkül csúszik!

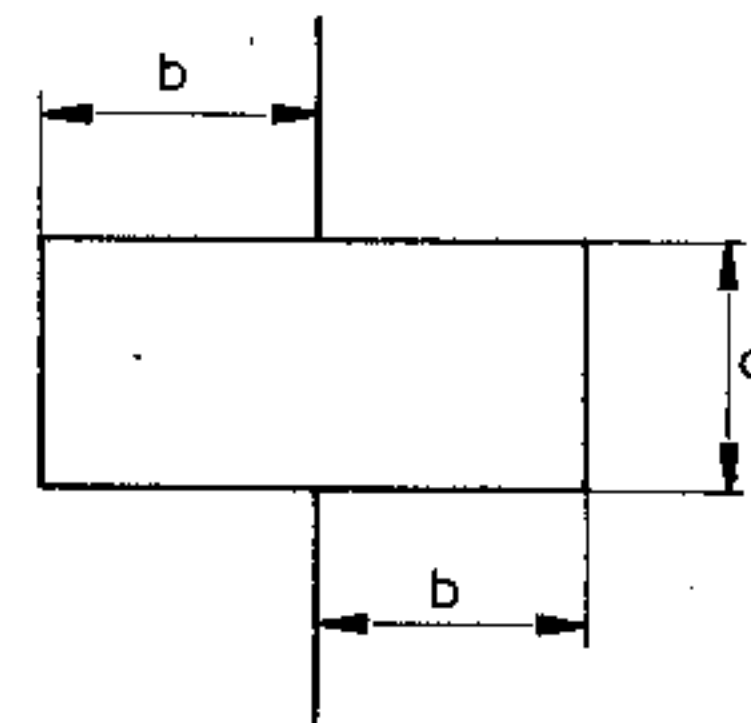


- 12.25.** A z -tengely körül, egymás fölött két, Θ_1 és Θ_2 tehetetlenségi nyomatékú test forog ω_1 , ill. ω_2 szögsebességgel. Mekkora lesz a rendszer szögsebessége, ha a két testet egymásra csúsztatva összekapcsoljuk?

- 12.26.** A vízszintes tengelyhez rögzített M tömegű, l hosszúságú homogén rúd függőlegesen lóg. Alsó végpontjának v_0 vízszintes sebességgel nekiütközik egy m tömegű golyó a) teljesen rugalmatlanul (az m rátapad a rúdra); b) rugalmasan. Írjuk le a mozgást!



- 12.27.** Vékony, M tömegű és l hosszúságú rúd vízszintes, súrlódásmentes felületen nyugszik. Kis, szintén M tömegű gittedarab a rúdra merőleges v sebességgel repül, hozzáütközik a rúd végéhez és ráragad.
- Mekkora lesz a rendszer tömegközéppontjának sebessége ütközés előtt és után?
 - Mekkora lesz a rendszer (tömegközéppont körüli) impulzusnyomatéka ütközés után?
 - Mennyi mozgási energiavész el az ütközés során?
- 12.28.** A ρ felületi tömegsűrűségű téglalap alakú lemezt függőlegesen kifeszített D torziósnyomatékú szálhoz rögzítjük. (Pl.: galvanométer-tükör.) A lapra merőlegesen, a száltól r távolságra, m tömegű, v_0 sebességű részecske ütközik, majd rugalmasan visszapattan. Írjuk le a mozgást! Mekkora lesz a lap maximális kitérése?

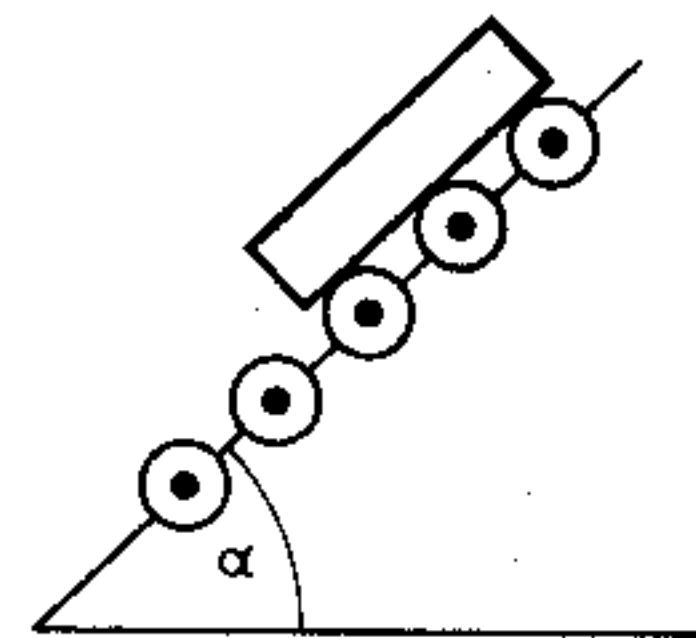


- 12.29. Egy cső rögzített tengely körül szabadon foroghat. Tehetetlenségi nyomatéka I . $t=0$ -ban a cső szögsebessége Ω . A cső belsejében a forgástengely mentén egy m tömegű golyó v sebességgel kezd csúszni. Bizonyítsuk be, hogy a golyó sebessége a csőhöz viszonyítva

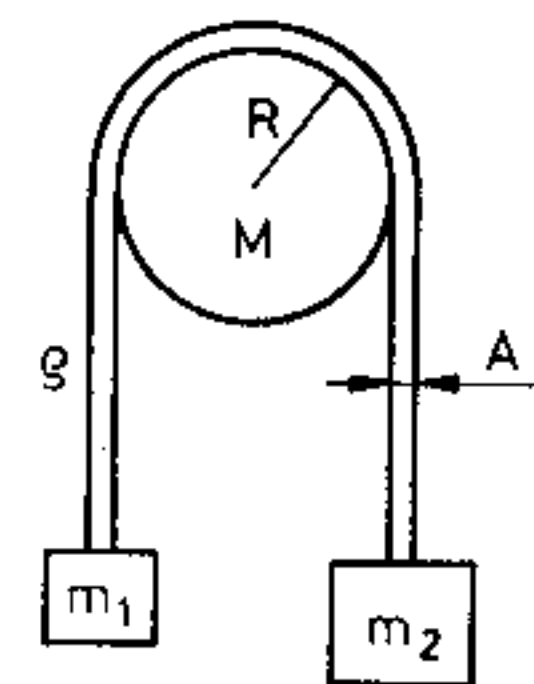
$$\left(v^2 + \frac{I}{I+mr^2} \Omega^2 r^2 \right)^{1/2},$$

ahol r a golyó forgástengelytől mért távolsága!

- 12.30. M tömegű, R sugarú merev gömb ω szögsebességgel szabadon forog egy rögzített tengely körül. Egy m tömegű részecske, mely kezdetben az egyik pólusban volt, állandó v sebességgel mozog egy főkör mentén. Mekkora szöggel marad le a gömb forgása, amikor a részecske a másik pólushoz ér?
- 12.31. Mennyivel változik meg a Föld forgási energiája, ha – változatlan tömeg mellett – sugara 1%-kal megnő?
- 12.32. ω_0 szögsebességgel forgó r sugarú hengert kezdősebesség nélkül az asztalra helyezünk. Írjuk le, hogyan mozog tovább!
- 12.33. Egy korongot az asztalra fektetünk és függőleges tengely körül forgásba hozzuk. Hogyan mozog a korong, miután elengedjük?
- 12.34. Egy R sugarú, M tömegű tekegolyót úgy löknek el, hogy az gurulás nélkül, v_0 sebességgel csúszva indul a pályán. (A súrlódási együttható μ .) Milyen távol jut a golyó, amíg gurulása csúszásmentes lesz, és mekkora lesz a gurulás sebessége?
- 12.35. Hol kell a biliárdgolyót meglökni ahhoz, hogy mozgása során végig csúszásmentesen gördüljön?
- 12.36. Vizsgáljuk a biliárdgolyó mozgását tetszőleges kezdeti feltétel esetén! (Merev gömb + súrlódás.)
- 12.37. Mekkora sebességgel guríthatjuk a golyót (hengert) vízszintes felületen, ha azt akarjuk, hogy lejtőhöz érve ne hagyja el a felületet?
- 12.38. Mekkora egy görgős lejtőn lecsúszó láda legnagyobb sebessége? (Tételezzük fel, hogy a görgők átmérője sokkal kisebb a láda hosszánál!)

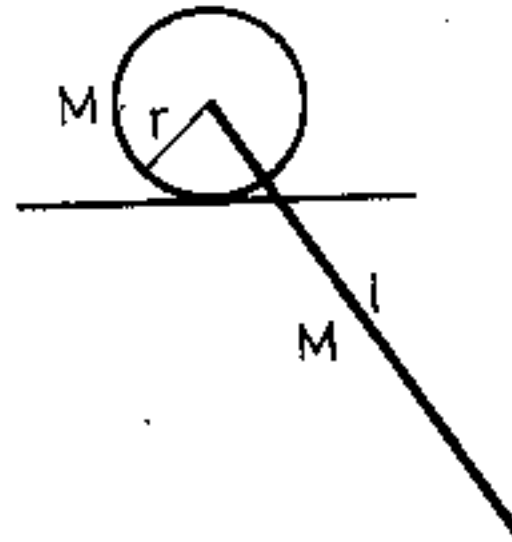


- 12.39. Az ábrán látható csiga és kötélt tömege *nem* hanyagolható el, s mindkettő homogén eloszlású. A csiga súrlódás nélkül foroghat, a kötélt nem csúszik. Kezdetben ($t=0$) a rendszert azonos magasságban vannak. Hogyan mozog a rendszer? (A kötélt hossza l ; $m_2 > m_1$.)

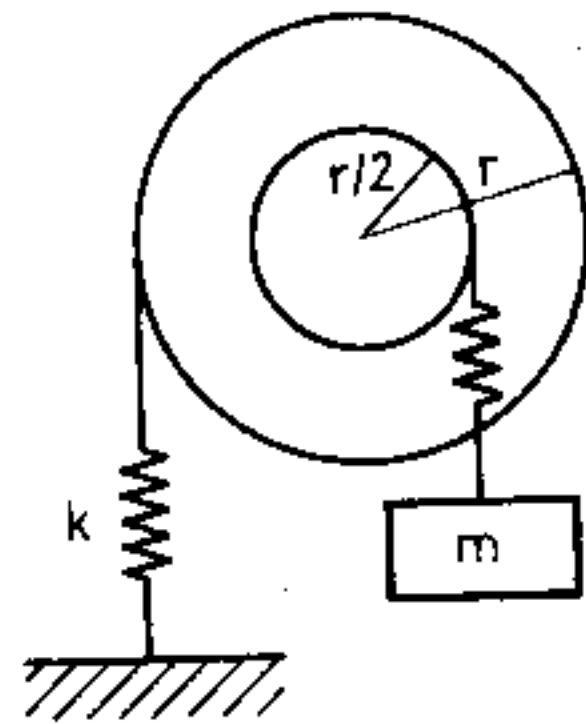


- 12.40. r sugarú homogén henger R sugarú hengerfelület belsejében csúszásmentesen gördül. Határozzuk meg a henger Lagrange-függvényét! Milyen mozgást végez a henger?
- 12.41. Írjuk le az m tömegű, l hosszúságú homogén rúdból és a végére erősített M tömegű, R sugarú homogén korongból álló inga mozgását kis kitérések esetén, ha
- a korong szabadon foroghat a rúdhoz rögzített vízszintes tengely körül;
 - a korong a rúdhoz van rögzítve!

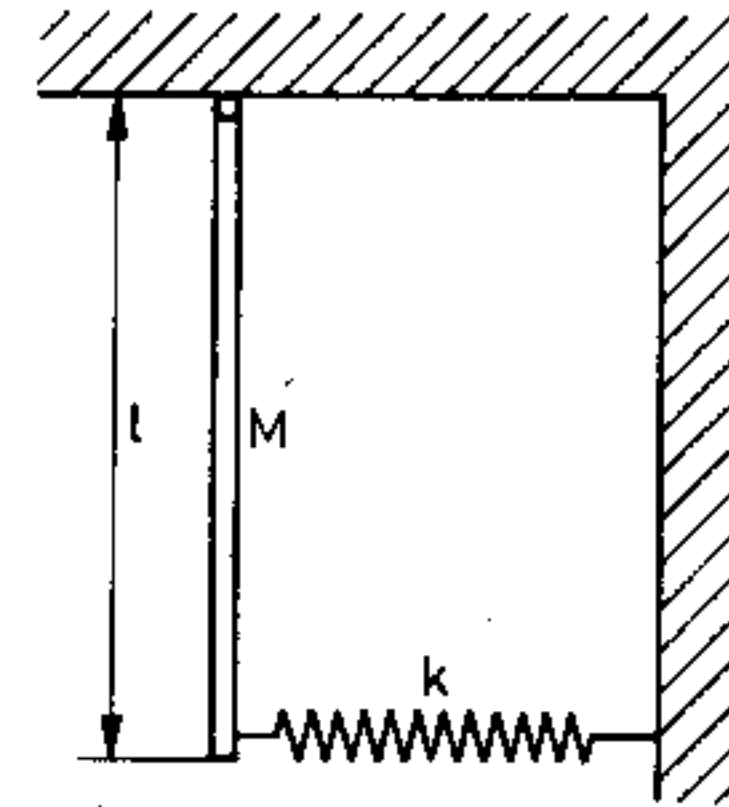
- 12.42. M tömegű, r sugarú tárcsa csúszás nélkül mozoghat egy vízszintes sínen. Középpontjába M tömegű, l hosszúságú rudat erősítünk úgy, hogy a rúd függőleges síkban lenghessen. Írjuk fel a rendszer Lagrange-függvényét és határozzuk meg a kis rezgések frekvenciáját!



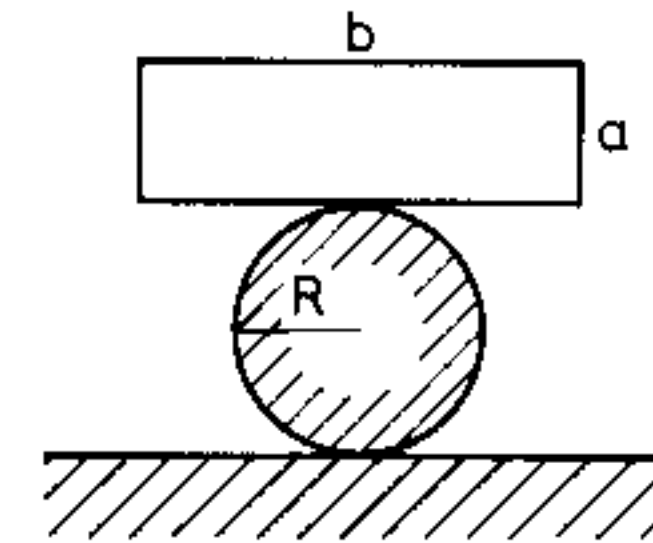
- 12.43. Az r sugarú, m tömegű homogén korong vízszintes tengely körül foroghat. A korong külső kerületére súlytalannak tekinthető, nyújthatatlan fonállal k direkciós erejű rugót erősítünk, melynek másik végét a talajhoz rögzítjük. A korongra $r/2$ sugarú körön egy másik fonal segítségével ugyanolyan rugón keresztül m tömegű terhet akasztunk. Írjuk fel a korong és terhelő mozgásegyenleteit!



- 12.44. M tömegű, l hosszúságú homogén rudat súrlódásmentes csuklóra akasztunk az ábra szerint. Másik végére a falhoz rögzített k direkciós erejű rugó csatlakozik. Határozzuk meg a kis rezgések frekvenciáját!



- 12.45. Az m tömegű, l hosszúságú homogén rudat mindkét végén k direkciós erejű rugóval támasztjuk alá. A rudat úgy hozzuk mozgásba, hogy egyik végét egy kis a távolságra lenyomjuk. Írjuk le a rúd mozgását!
- 12.46. Írjuk le a negyedkör alakú lapból álló fizikai inga kis rezgéseit!
- 12.47. Rögzített, R sugarú vízszintes tengelyű henger tetejére a vastagságú homogén lapot helyezünk. Határozzuk meg a kis rezgések frekvenciáját! Mi az egyensúly stabilitásának feltétele? Hogyan függ a potenciális energia a kitérés szögétől? Tételezzük fel, hogy a tapadó súrlódás nagyon nagy!

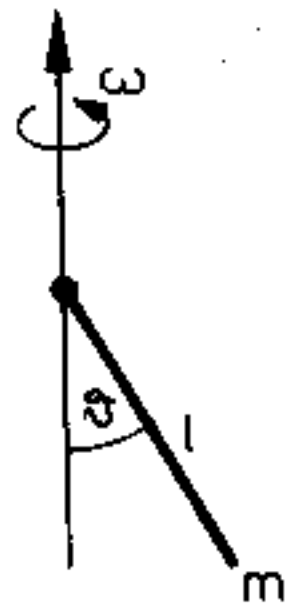


- 12.48. Határozzuk meg a sima, vízszintes síkon elhelyezkedő homogén félgömb kis rezgéseinek frekvenciáját!
- 12.49. Egy R sugarú korong két homogén félgömbből tevődik össze; az egyik sűrűsége ρ , a másiké 2ρ . A korong vízszintes sí-

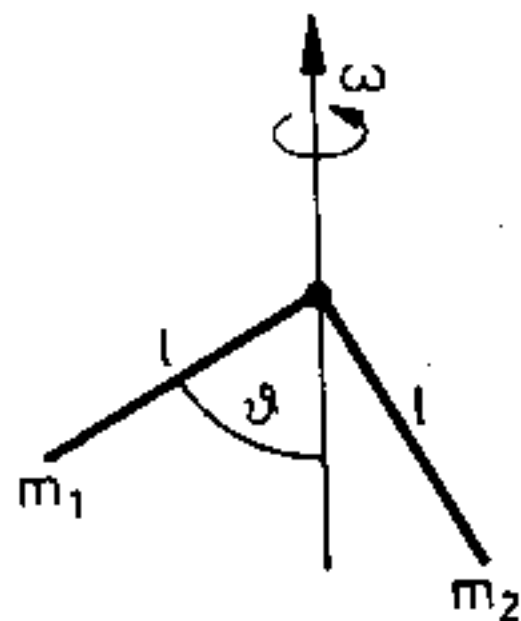
kon gördülhet. Határozzuk meg a Lagrange-függvényt! Írjuk le a mozgást numerikusan!

12.50. Egy M tömegű Θ tehetetlenségi nyomatékú testre állandó F erő hat a súlyponttól d távolságra, iránya a testhez rögzített. Írjuk le a mozgást!

12.51. Az m tömegű l hosszúságú homogén rúd vízszintes tengelyű csuklóval kapcsolódik az ω szögsebességgel forgó függőleges tengelyhez. Határozzuk meg a kihajlás szögét a stacionárius állapotban! Mekkora a csuklóban ható erő?



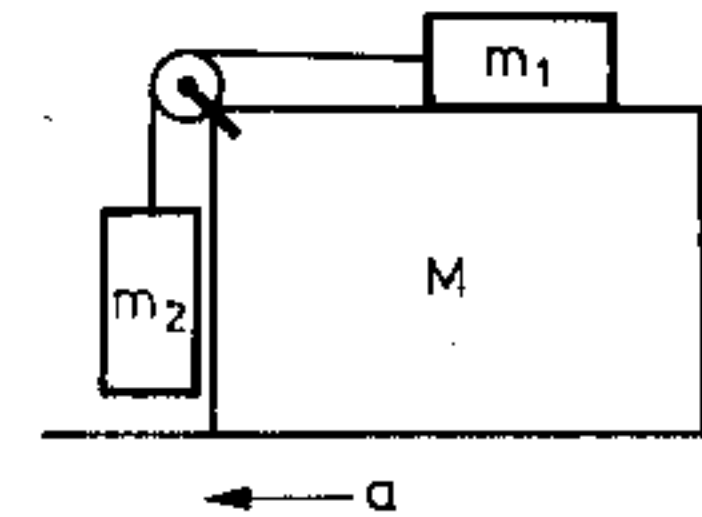
12.52. Két egyforma hosszúságú, de különböző tömegű rudat egyik végüknél egymásra merőlegesen összeerősítünk, majd csuklósan függőleges tengelyhez rögzítettünk. Mekkora szögsebességgel kell forgatnunk a tengelyt, hogy az egyik rúd ϑ szöget zárjon be vele?



13. Mozgás leírása gyorsuló és forgó koordináta-rendszerben

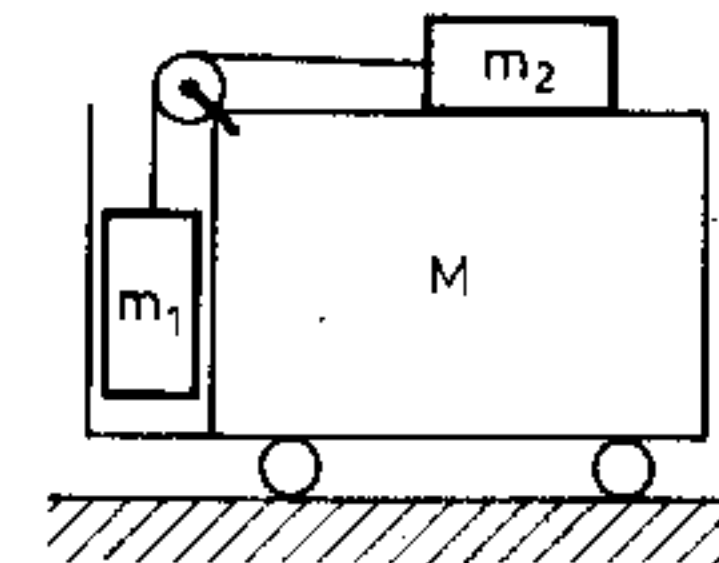
13.1. Írjuk le milyennek látja az a gyorsulással mozgó autóban ülő megfigyelő az autó mellett szabadon eső kő mozgását!

13.2. Mekkora gyorsulással kell az M tömeget mozgatni, hogy hozzá képest m_1 és m_2 nyugalomban legyenek? A kötélnyújthatatlan és elhanyagolható tömegű, súrlódás sehol nincs.

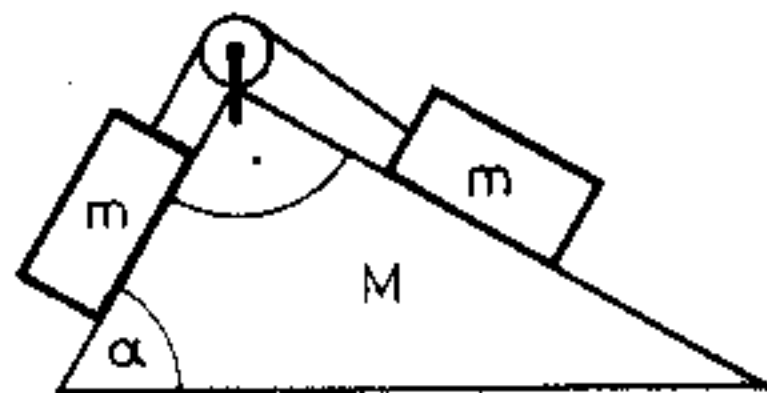


13.3. Az M tömegű ék elmozdulhat a vízszintes lapon. Az éken m tömegű test csúszik végig a gyorsulással; a súrlódás mindenütt elhanyagolható. Határozzuk meg az egyes testek gyorsulását és az m tömegű test pályáját! Az ék hajlásszöge α .

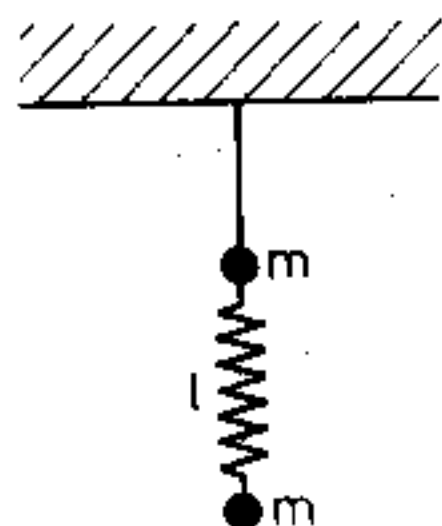
13.4. Határozzuk meg az ábrán látható rendszer egyes elemeinek gyorsulását! A súrlódás mindenütt elhanyagolható. Minek felel meg az $m_2 \rightarrow \infty$ határeset?



- 13.5. Határozzuk meg az ábrán látható rendszer egyes elemeinek gyorsulását! Mi a feltétele annak, hogy a bal oldali m tömegű test a mozgás során érintkezzen a lejtővel ($\alpha > 45^\circ$)? A súrlódás mindenütt elhanyagolható!



- 13.6. Írjuk le hogyan esik az ábrán látható rendszer a fonal elégetése után, ha eredetileg mindegyik test nyugalomban volt! A rugó tömege elhanyagolható, nyugalmi hossza l , sajátfrekvenciája ω_0 .



- 13.7. Egy liftben vízzel teli vödör van, ebben egy test úszik. Megváltozik-e a test vízbemerülési mélysége, ha a lift a gyorsulással kezd mozogni?
- 13.8. Írjuk le a matematikai inga kis lengéseit, ha felfüggesztési pontja az inga lengési síkjában, vízszintesen a gyorsulással mozog!
- 13.9. Írjuk le, mivel magyarázza az ω szögsebességgel egyenletesen forgó korongon ülő megfigyelő annak a testnek mozgását, amely a korong mellett szabadon esik!
- 13.10. ω szögsebességgel forgó vízszintes csőben m tömegű golyó mozog súrlódás nélkül. Írjuk le a mozgást abban az esetben,

ha a golyó v_0 sebességgel indult a forgástengelyről! Mekkora erővel nyomja a cső falát?

- 13.11. Mutassuk meg, hogy ha az előző feladatbeli cső a vízszintessel α szöget zár be, akkor a forgástengelyről kezdősebesség nélkül induló test t idő alatt

$$\frac{2g}{\omega^2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{2} \omega t \cos \alpha \right)$$

utat tesz meg!

- 13.12. Kis vitorlás hajó az egyenlítői szélcsendes zónába ér. A kapitány – egyéb hajtómű híján – rövid gondolkodás után a hajó 200 kg tömegű horgonyát felhúztatja a 20 m magas árbocra. A – horgony nélkül 1000 kg tömegű – hajó mozgásba jön. Miért, milyen irányban és mekkora sebességgel? ($R_F = 6400$ km.)
- 13.13. Milyen irányban és mennyire tér el a függőlegestől a 45° északi szélességű pontban 100 m magasról elejtett test? (A test kezdősebessége 0, a közegellenállást és a Föld transzlációs gyorsulását hanyagoljuk el!)
- 13.14. A forgó Földön egy φ északi szélességű pontból nem túl nagy v_0 sebességgel függőlegesen feldobunk egy testet. Hol fog leesni? (A közegellenállást hanyagoljuk el!)
- 13.15. M tömegű autó mozog vízszintesen egyenletes sebességgel először keletre, majd nyugatra. Mikor lesz nagyobb a súlya? Becsüljük meg a súlykülönbséget, ha a mozgás a 45° északi szélességi kör mentén zajlik le és $M = 10^3$ kg, $v = 10$ m/s!
- 13.16. Határozzuk meg a Föld forgásának hatását az inga kis lengéseire! (A Föld ω_F szögsebességének négyzetét, ω_F^2 -et tartalmazó tagokat hanyagoljuk el!)
- 13.17. Az Egyenlítőn fekvő repülőtéren három teljesen egyforma ingaóra van. Az A ingaóra a repülőtéren marad, a K ingaórát egy kelet, a Ny -t egy nyugat felé induló repülőgépre helyezik. Pontosan délben – amikor mindhárom óra ugyanazt az időt mutatja – a repülőgépek elindulnak és egyenletes sebességgel körbepülnek a Földet úgy, hogy egyszerre érjenek vissza a kiindulási repülőtérré. Visszaérkezésükkor az A óra éppen következő nap déli 12 óra 0 perc 0 másodpercet mutat.

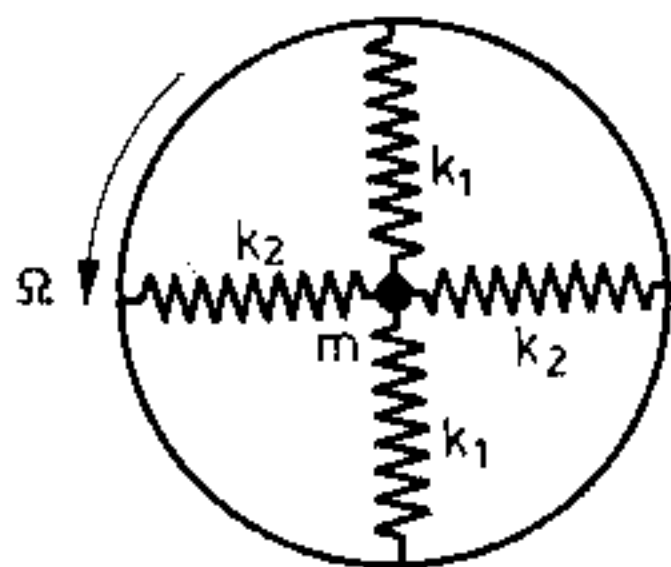
- a) Mindhárom óra ugyanezt az időt mutatja-e? Ha nem, soroljunk fel különböző okokat, melyek az időkülönbséget előidézhetik!
- b) A legjelentősebb hatás figyelembevételével adjuk meg, hogy mennyivel fog többet, illetve kevesebbet mutatni a K , illetve az Ny óra a 24 órás repülés után!

13.18. Bizonyítsuk be, hogy egy m tömegű tömegpont Lagrange-függvénye ω szögsebességgel egyenletesen forgó koordináta-rendszerben

$$L = \frac{m}{2} (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 - V(\mathbf{r}).$$

Itt $V(\mathbf{r})$ a külső erők potenciálja, \mathbf{v} a fenti rendszerben mért sebesség.

13.19. Határozzuk meg a k_1 és k_2 direkciós erejű rugókkal az ábrán látható módon korongra rögzített m tömegű részecske kis rezgéseit, ha a korong Ω szögsebességgel forog tengelye körül! (Az m tömeg csak a korong síkjában mozoghat!)



14. Szórásszámítás

14.1. Határozzuk meg a következő sima, rugalmas, z -tengely körüli forgásfelületeken szóródó részecskék differenciális szórási hatáskeresztmetszetét, ha eredeti v sebességük a z -tengellyel párhuzamos volt.

a) $\varrho(z) = b \sin \frac{z}{a} \quad (0 \leq z \leq \pi a);$

b) $\varrho(z) = Az^n \quad (n > 0, n \neq 1);$

c) $\varrho(z) = b - \frac{a^2}{z} \quad \left(\frac{a^2}{b} \leq z < \infty \right).$

($\varrho(z)$ a z magasságú keresztmetszet sugara.)

14.2. Határozzuk meg egy a sugarú gömbön való szóródás differenciális hatáskeresztmetszetét! (Ez olyan kölcsönhatásnak felel meg, amelyre $V = \infty$, ha $r < a$ és $V = 0$, ha $r > a$.)

14.3. E energiájú részecske szóródik a $V(r) = \alpha/r^2$ ($\alpha > 0$) potenciálon. Határozzuk meg a differenciális és a teljes szórási hatáskeresztmetszetet!

14.4. Határozzuk meg a differenciális szórási hatáskeresztmetszetet az

$$U(r) = \begin{cases} V, & \text{ha } r < a, \\ 0, & \text{ha } r > a \end{cases}$$

potenciál esetén!

14.5. Határozzuk meg a differenciális szórási hatáskeresztmetszetet az alábbi potenciál esetén:

$$U(r) = \begin{cases} \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{R}, & \text{ha } r < R, \\ 0, & \text{ha } r > R. \end{cases}$$

14.6. Határozzuk meg a gyors részecskék ($E \gg V$) szóródásának differenciális hatáskeresztmetszetét az

$$U(r) = \begin{cases} V \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), & \text{ha } r < R, \\ 0, & \text{ha } r > R \end{cases}$$

potenciálban!

14.7. Állapítsuk meg, milyen törvény szerint változik a részecskenyaláb intenzitása nyelőcentrumokkal kitöltött térfogaton történő áthaladás során! A nyelőcentrumok sűrűsége n , a befogás hatáskeresztmetszete σ .

14.8. Határozzuk meg a v_1, v_2 sebességű, n_1, n_2 sűrűségű részecskenyalábok ütközése során a dV térfogatban dt idő alatt lejátszódó reakciók számát, ha a reakció hatáskeresztmetszete $\sigma = \text{állandó!}$

14.9. M tömegű test olyan térben mozog, amely $m \ll M$ tömegű, kezdetben nyugvó részecskékkel van tele (pl. makroszkópikus test, gázban). Határozzuk meg a mozgó M tömegre ható súrlódási erőt! Az m tömegű részecskék rugalmasan ütköznek az M tömegű testtel, az ütközés hatáskeresztmetszete $d\sigma = f(\vartheta) d\vartheta$.

15. Rugalmasságtan

15.1. Határozzuk meg a rugalmas közeg deformációs tenzorát, ha a deformációvektor

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\rho g}{E} \left(\sigma(l-z)x; \sigma(l-z)y; -\frac{1}{2} \{l^2 - (l-z)^2 - \sigma(x^2 + y^2)\} \right)!$$

15.2. Egyensúlyban levő rugalmas test deformációvektora

$$u_1 = -kyz, \quad u_2 = kxz, \quad u_3 = k(2x^2 - ay^2).$$

Határozzuk meg az a együtthatót abból a feltételből, hogy a $\sqrt{}$ testre tömegezők nem hatnak!

15.3. Egy rugalmas kocka minden pontjában a deformációs tenzor

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alakú. (A koordináta-rendszer tengelyei párhuzamosak a kocka éleivel és $c \ll 1$.) Határozzuk meg, hogyan változnak a kocka oldalélei!

15.4. Egy a oldalélű rugalmas kocka minden pontjában a deformációs tenzor

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg a deformációk főirányait és a relatív térfogtváltozást! Milyen tömeg- és felületi erők esetén ír le a fenti ε_{ik} egyensúlyi helyzetet?

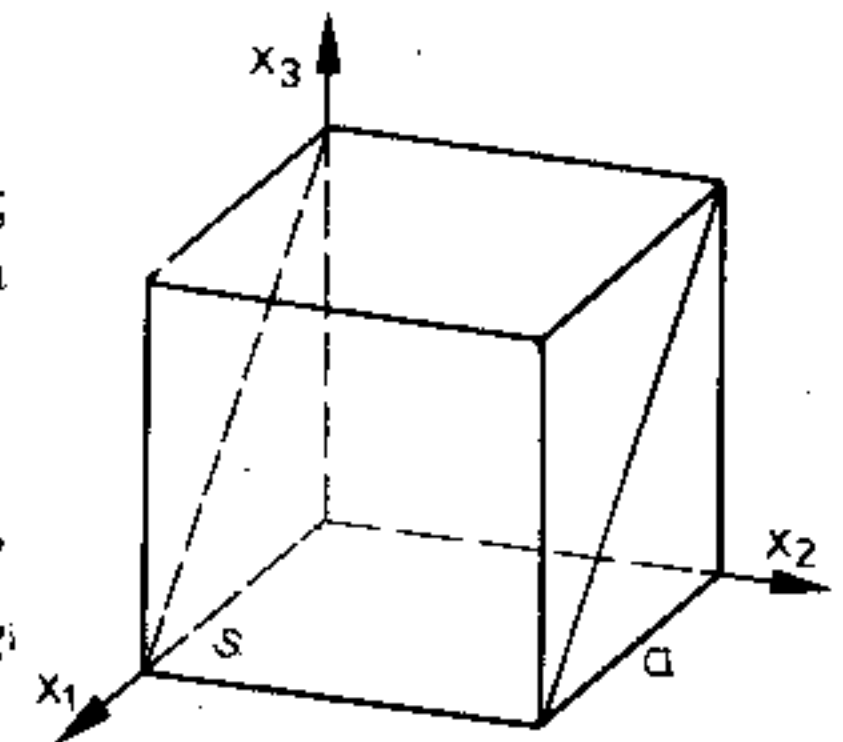
15.5. Egy rugalmas kocka egyensúlyi állapotában a feszültségtenzor

$$\sigma = \alpha \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

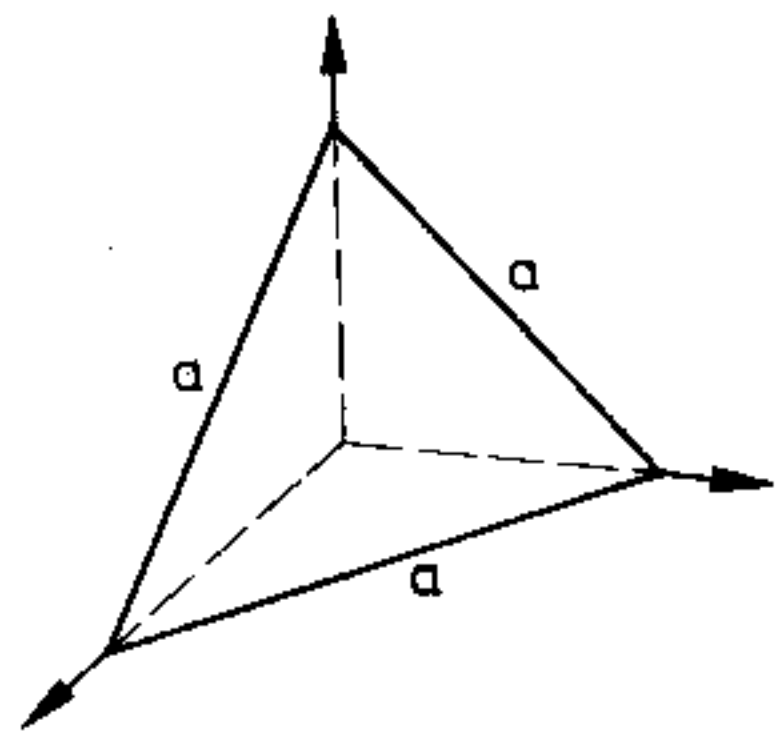
Határozzuk meg, hogy

a) hat-e tömegező a kockára;
b) mekkora erő hat a kocka lapjaira;

c) mekkora erő hat az $n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ normálisú, két lapátlóra illeszkedő S^i síkra?

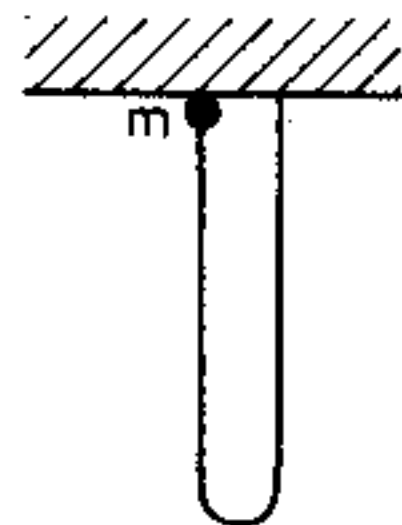


- 15.6. Homogén rugalmas gömböt p nyomású folyadékba helyezünk. Hogyan deformálódik a gömb?
- 15.7. Egy a, b, c oldalélű téglatestet szoba sarkába helyezünk és szabad lapjait normális irányú, rendre F_1, F_2, F_3 nagyságú erővel nyomjuk. Mekkora a térfogatváltozás és a csúcsok elmozdulása?
- 15.8. Egy tetraéder alaplapja a oldalélű szabályos háromszög, többi három lapja pedig derékszögű háromszög. A tetraédert az ábra szerint egy szoba sarkába helyezzük. A szabad lapra ható nyomás P . Mekkora a tetraéder térfogatváltozása és a csúcsok elmozdulása?



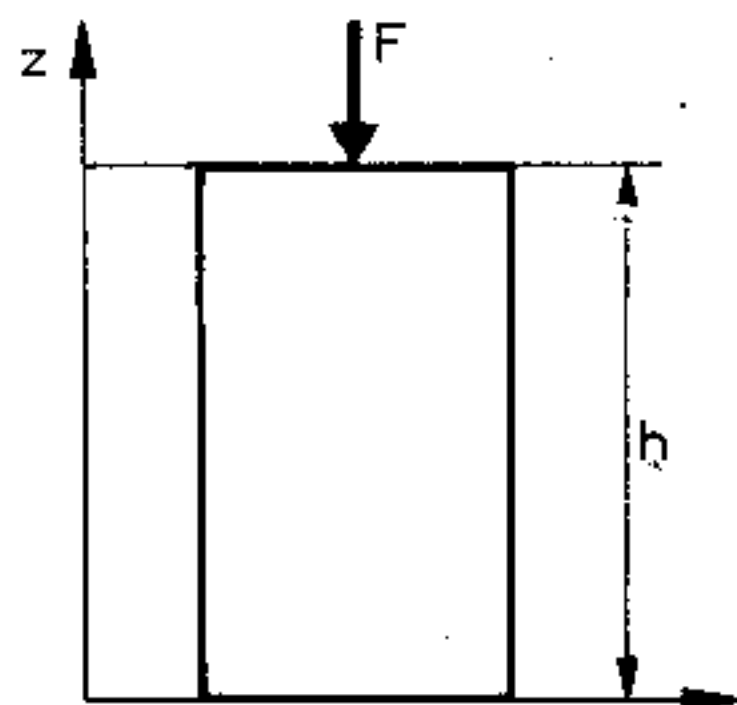
- 15.9. Rugalmas hasábot vele megegyező méretű, merev falú üregbe helyezünk. A hasáb szabad lapjára merőleges irányú, F erő hat. Határozzuk meg a hasáb deformációját és a feszültségeket, ha az üregfal és a hasáb közötti súrlódás elhanyagolható!
- 15.10. Határozzuk meg a nehézségi erőterben álló hosszú, elhanyagolható vastagságú rúd saját súlya alatt kialakuló deformációját!
- 15.11. Mekkora erővel húzzunk egy alátámasztott függőleges pálcát, hogy a hossza a saját súlya hatására ne változzon?
- 15.12. l hosszúságú, nagyon vékony rugalmas rúd ω szögsebességgel forog egyik vége körül vízszintes síkban. Írjuk le, hogyan deformálódik!

- 15.13. Elhanyagolható tömegű, L hosszúságú, A keresztmetszetű és T szakítószilárdságú húr egyik végét a mennyezethez erősítjük, másik végére m tömegű, elhanyagolható méretű testet rögzítünk, majd ezt a testet a húr másik végpontjához közel szintén a mennyezetre erősítjük. A test hirtelen kiszabadul és lezuhan. Mekkora kell a húr E Young-modulusának lennie ahhoz, hogy a húr ne szakadjon el?

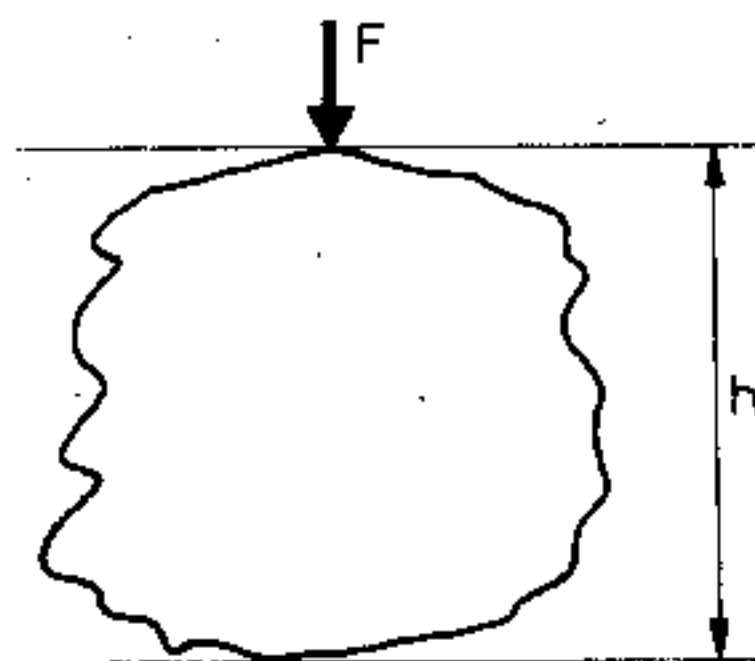


- 15.14. Kör keresztmetszetű oszlop G terhet visel. Sűrűsége ρ . Milyen alakú legyen, ha azt kívánjuk, hogy a nyomás minden keresztmetszetén egyenlő (p) legyen?
- 15.15. Határozzuk meg azon ρ sűrűségű, súlyos, rugalmas henger feszültségi állapotát és deformációját, amely ρ_0 sűrűségű folyadék alján áll. (A henger tengelye függőleges.)
- 15.16. Határozzuk meg az R_1 belső, R_2 külső sugarú gömbhéj deformációját, ha belsejében a nyomás p_1 ; a külső nyomás p_2 !
- 15.17. Határozzuk meg az R sugarú gömb saját gravitációs tere által okozott deformációját!
- 15.18. Határozzuk meg henger alakú cső deformációját (belső sugara R_1 , külső sugara R_2), ha belsejében a nyomás p , kívül pedig 0!
- 15.19. Határozzuk meg a tengelye körül ω szögsebességgel forgó henger deformációját!
- Útmutatás: Forgó koordináta-rendszerben a tömeget a centrifugális erő lesz!

- 15.20. Rugalmas hasábot két, egymástól h távolságra levő párhuzamos lemez közé szorítunk. A lemezek által a hasábra gyakorolt erő F . Határozzuk meg a hasáb térfogatváltozását!



- 15.21. Egy tetszőleges alakú rugalmas testet szorítunk két, egymástól h távolságra levő párhuzamos lemez közé F erővel. Határozzuk meg a test térfogatváltozását!



- 15.22. Egy l hosszúságú, homogén, egyik végén befogott rudat M hajlítónyomatékkal terhelünk. Határozzuk meg a rúd végének lehajlását és elfordulását!
- 15.23. Egy l hosszúságú, homogén, egyik végén befogott rudat a másik végén F erővel terhelünk. Határozzuk meg a rúd végének lehajlását!
- 15.24. Határozzuk meg, hogy mekkora az egyik végén befogott rúd szabad végének lehajlása saját súlya alatt! (A rúd egységnyi hosszának súlya G .)

- 15.25. Mindkét végén befogott rudat saját súlya terheli. Határozzuk meg a befogások helyén ébredő erőket és nyomatékokat! (A rúd egységnyi hosszának súlya G .)

- 15.26. Határozzuk meg az R sugarú, kör alakú membrán deformációját, ha gravitációs térben vízszintesen helyezkedik el!

- 15.27. Határozzuk meg a mindkét végén befogott, l hosszúságú, állandó ρ sűrűségű, σ feszültségű húr transzverzális rezgéseinek sajátfrekvenciáit!

- 15.28. Az l hosszúságú, mindkét végén befogott, ρ sűrűségű homogén húr feszültsége σ . Határozzuk meg mozgását, ha

a)
$$u(x, 0) = A \sin \frac{2\pi}{l} x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0;$$

b)
$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = B \sin \frac{2\pi}{l} x.$$

- 15.29. Határozzuk meg az l hosszúságú, megfeszített húr mozgását, ha a kezdeti feltétel

- a) a kitérés mindenütt zérus, a sebességeloszlás

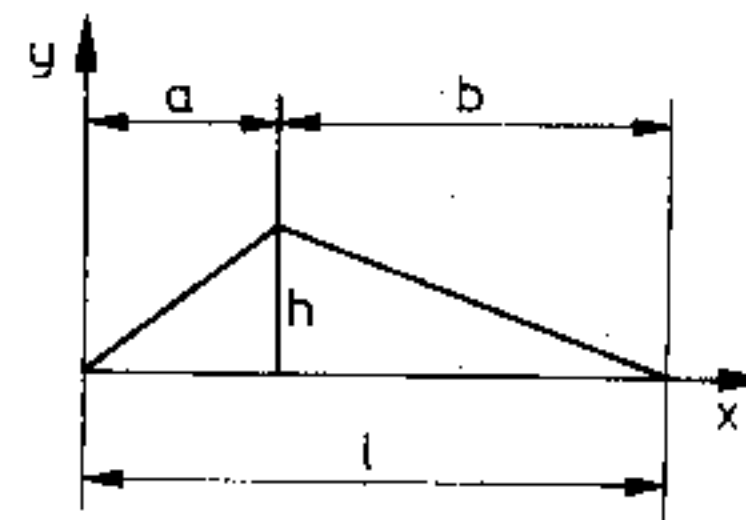
$$G(x) = v_0 \sin \left(n\pi \frac{x}{l} \right), \quad \text{ahol } n \text{ egész szám,}$$

- b) a kitérés:

$$F(x) = A \sin \left(\pi \frac{x}{l} \right) \cos \left(2\pi \frac{x}{l} \right),$$

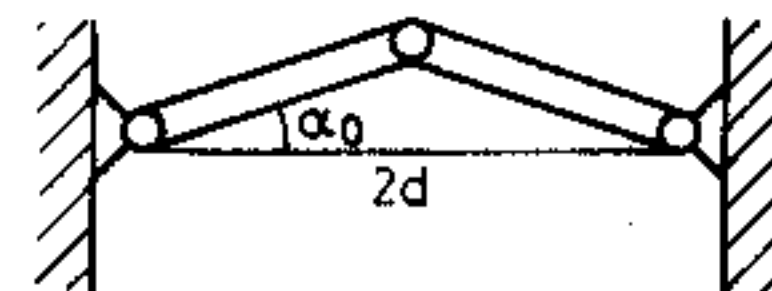
és a sebesség mindenütt zérus.

- 15.30. Az l hosszúságú, ρ sűrűségű hűrt F erővel megfeszítjük. A $t=0$ -ban kihúzzuk úgy, hogy az ábrán látható alakot vegye fel, és kezdősebesség nélkül elengedjük. Írjuk le a húr mozgását!

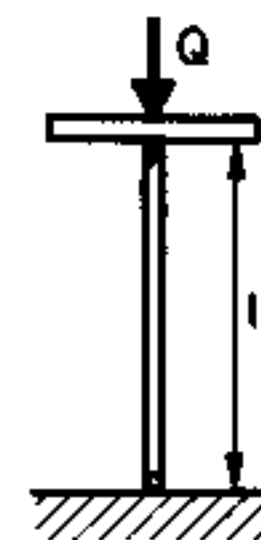


- 15.31. Hol kell az előző feladatban a húrt kihúzni (mekkora legyen a), hogy a k -adik felhang ne szólaljon meg?
- 15.32. Írjuk le a mindkét végén befogott, megfeszített húr mozgását, ha kezdeti kitérése mindenütt nulla, a középpont körül $2s$ hosszúságú szakaszon pedig minden pont azonos v_0 transzverzális sebességgel kezd mozogni. (A húr többi pontjának kezdősebessége 0.) Milyen eredményt kapunk, ha $s \rightarrow 0$, de $v_0 s = p = \text{állandó}$?
- 15.33. Mindkét végén befogott, l hosszúságú, A keresztmetszetű és ρ vonalmenti sűrűségű húr feszültsége σ . A húr felezőpontjába m tömegű testet rögzítünk. Határozzuk meg a rendszer sajátfrekvenciáit!
- 15.34. Határozzuk meg a mindkét végén befogott, σ feszültségű, l hosszúságú húr sajátfrekvenciáit, ha két egyenlő hosszúságú, ρ_1 , illetve ρ_2 sűrűségű darabból áll! (A két rész közötti illeszkedés olyan, hogy a húr itt sem törhet meg.)
- 15.35. Határozzuk meg az egyik végén befogott (l hosszúságú) rúd longitudinális sajátrezgéseinek frekvenciáit,
 a) ha a másik vége szabad;
 b) ha a másik végét is befogjuk!
 c) Milyenek lesznek a sajátfrekvenciák akkor, ha mindkét vég szabad?
- 15.36. l hosszúságú, A keresztmetszetű homogén rúd egyik végét befogjuk, másik végére M tömegű testet rögzítünk. Határozzuk meg a rendszer longitudinális rezgéseinek sajátfrekvenciáit!
- 15.37. Az l hosszúságú, homogén rúd végére m , illetve M tömegű testet erősítünk. Határozzuk meg a rendszer longitudinális rezgéseinek sajátfrekvenciáit!
- 15.38. Határozzuk meg az (a és b oldalhosszúságú) téglalap alakú membrán sajátrezgéseit!
- 15.39. Tekintsünk egy kocka alakú rugalmas testet, melynek oldaléle a hosszúságú. Helyezzük ezt egy ugyancsak a oldalélű, kocka alakú, merev falú üregbe. Határozzuk meg a kocka rugalmas rezgéseinek sajátfrekvenciáit!
- 15.40. Határozzuk meg az R sugarú gömb radiális rezgéseinek frekvenciáját, ha vákuumba helyezzük!

- 15.41. Határozzuk meg az egydimenziós ω körfrekvenciájú, rugalmas hullám energiasűrűségét, átlagos energiáját és átlagos energiaáramát!
- 15.42. Két, egyforma homogén rúdból az ábrán látható rendszert állítjuk össze. Mekkora α szöget zárnak be a rudak a vízszintes-szel, ha a középső csuklóra Q súlyú testet akasztunk? Milyen terhelés esetén billennek át a rudak a túloldalra? Hogyan függ a rendszer energiája a vízszintessel bezárt szögtől különböző terhelések esetén? A rudak Young-modulusa E , keresztmetszete A , és tegyük föl, hogy $\alpha_0 < 1$!



- 15.43. Kör keresztmetszetű, l hosszúságú rúd mindkét végét csuklósan rögzítjük. Határozzuk meg a transzverzális sajátrezgések frekvenciáját Q nagyságú, tengely irányú terhelés esetén! Mikor válik instabillá a rendszer?

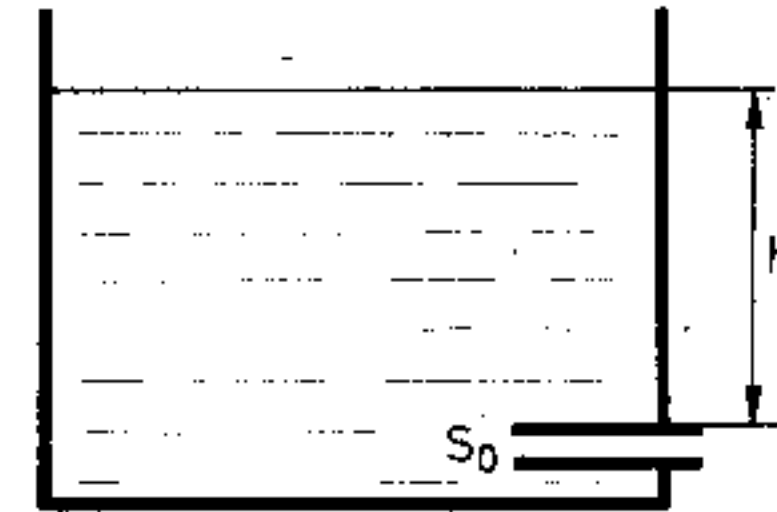


16. Hidrodinamika

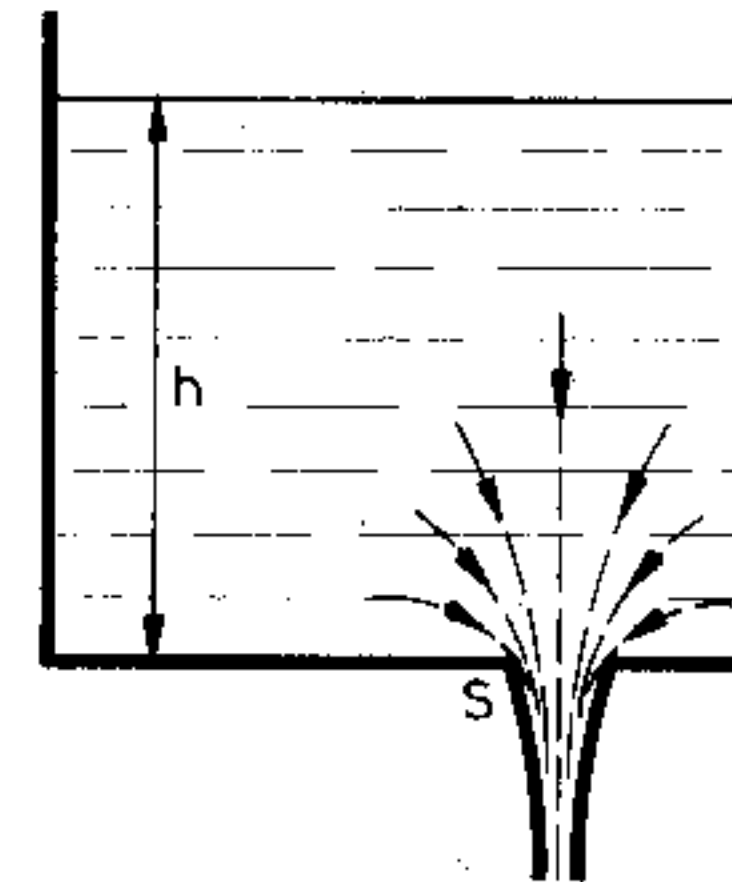
- 16.1. Egy pingponglabdát rögzítünk egy folyadékkal telt edény alján. Mi történik, ha abban a pillanatban, amikor elengedjük a labdát, egyidejűleg az edényt is elejtjük?
- 16.2. Egy folyadékkal töltött csille ferde lejtőn gurul lefelé. Milyen a szabad felszín alakja és a nyomáseloszlás a folyadékban?
- 16.3. Egy hasáb alakú edény alsó felében víz, a felső felében olaj van. Mekkora erők hatnak az edény falaira?
- 16.4. Mekkora a nyomás a Föld középpontjában, ha a Földet álló, homogén folyadékgömbnek tekintjük!
- 16.5. Határozzuk meg a $p(z)$ és $\rho(z)$ függvényeket a Föld légkörében, ha z a felszíntől mért magasság, a nyomás és a sűrűség közötti kapcsolat pedig $p = p_0(\rho/\rho_0)^n$. (A nehézségi gyorsulás állandónak vehető.)
- 16.6. Egy U alakú, folyadékot tartalmazó csövet az egyik függőleges szára körül ω szögsebességgel megforgatunk. Mekkora szintkülönbség alakul ki, ha
- ω kicsi;
 - ω elég nagy?
- 16.7. Egy vékony cső keresztmetszete adott $f(x)$ függvény szerint változik (x a cső tengelye mentén mért távolság). Határozzuk meg a csőben adiabatikusan áramló gáz nyomását, sebességét és a sűrűségét!
- 16.8. Milyen alakúra kell készítenünk egy „folyadékórát”, ha azt akarjuk, hogy a folyadék felszíne állandó sebességgel süllyedjen?
- 16.9. Egy vékony cső keresztmetszete adott $f(x)$ függvény szerint változik (x a cső tengelye mentén mért távolság). Hogyan változik a csőben áramló folyadék nyomása és sebessége?
- 16.10. Egy U alakú, függőleges szárú, sima falú csőbe ideálisnak tekinthető folyadékot töltünk. Milyen mozgást végezhet a folyadék?
- 16.11. Egy vízcsapra 0,5 m hosszú, 12 mm átmérőjű gumicsövet húzunk. A csap megnyitása után a csövön másodpercenként 11

víz folyik ki. A cső végét megemeljük, hogy a víz vízszintesen folyjon ki. Mekkora erővel kell tartanunk a cső végét?

- 16.12. Egy tartály oldalán levő nyílásba S_0 keresztmetszetű csövet illesztünk az ábrán látható módon. A tartályban víz van. Mutassuk meg az energia- és az impulzusmérleg segítségével, hogy a csövön kiáramló vízszög keresztmetszete $S_1 = S_0/2$!



- 16.13. Egy víztartály alján levő S keresztmetszetű nyíláson v függőleges átlagsebességgel ömlik ki a víz. Mekkora erővel nyomja a víz a tartályt? Mi a kapcsolat v és a vízréteg h vastagsága között?

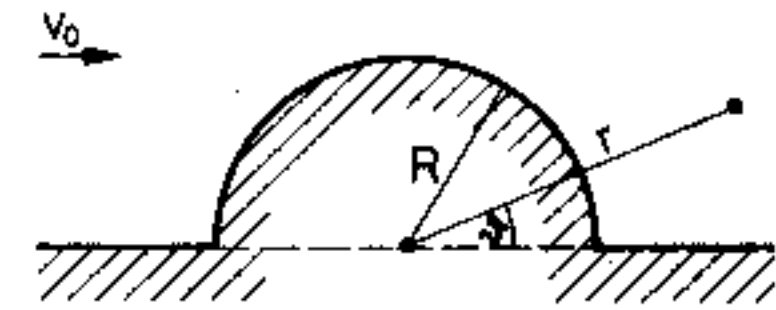


- 16.14. Egy kiegyensúlyozott mérleg egyik serpenyőjében két edény van egymás fölött; a felső vízzel töltött, az alsó üres. Mi történik, ha a felső tartályból egy kis nyíláson víz folyhat az alsóba?

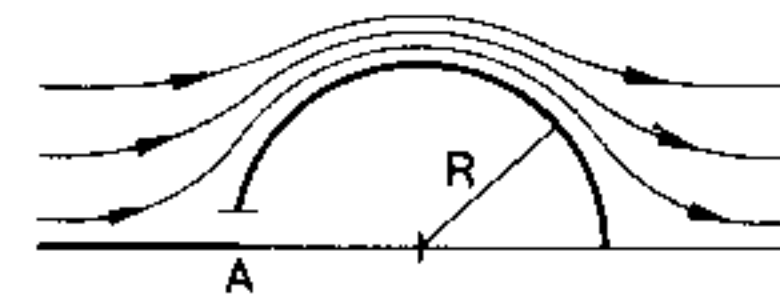
- 16.15. Lehet-e a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{A}{r^3} \mathbf{r}$ vektormező egy ideális, összenyomhatatlan folyadék áramlását leíró sebességtér? Örvénymentes-e az áramlás? Mi a sebességpotenciál?
- 16.16. Bizonyítsuk be a vektoranalízis eszközeivel azt a szemléletesen elég nyilvánvaló tényt, hogy egy merev falú edényben stationáriusan áramló folyadék összipulzusa nulla!
- 16.17. Az egész teret kitöltő összenyomhatatlan ideális folyadékba egy gömböt merítünk és a sugarát egy adott $R(t)$ függvény szerint változtatjuk. Mekkora a nyomás a gömb felszínén?
- 16.18. Az egész teret kitöltő álló ideális folyadékban egy R_0 sugarú vákuumbuborék van. Mennyi idő alatt telik meg folyadékkal?
- 16.19. Egy R sugarú gömb v_0 sebességgel mozog ideális folyadékban. Határozzuk meg a folyadék áramlását a gömb körül!
- 16.20. Hogyan változik meg egy rugóra akasztott vasgolyó rezgéseinek frekvenciája, ha a rendszert vízbe merítjük?
Útmutatás: Tekintsük a vizet ideális folyadéknak és határozzuk meg a v_0 sebességgel mozgó golyó körül áramló víz mozgási energiáját!
- 16.21. Milyen síkbeli potenciáláramlást ír le az $f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z$ függvény (Q valós állandó)? Határozzuk meg az áramvonalakat, az ekvipotenciális görbéket, valamint a sebességeloszlást!
- 16.22. Milyen áramlást írnak le az alábbi komplex függvények:
- a) $f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0)$ (Γ valós, z_0 komplex állandó),
- b) $f(z) = \bar{v}_0 \cdot z$ (v_0 komplex állandó)?
- 16.23. Határozzuk meg egy „síkbeli dipól”, vagyis egy forrás és egy hozzá nagyon közeli nyelő együttes áramlási terét!
- 16.24. Határozzuk meg egy homogén áramlásba helyezett síkbeli dipól áramlási terét! Az eredmény felhasználásával írjuk le, hogyan áramlik a folyadék egy R sugarú henger körül, ha attól nagyon messze homogén az áramlás!

- 16.25. Ideális folyadék áramlik az ábrán látható akadály körül. Mutassuk meg, hogy a síkbeli áramlás sebességpotenciálja

$$\Phi = v_0 \cdot \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \vartheta,$$



- ahol v_0 a folyadék sebessége az akadálytól végtelen távol.
- 16.26. Az $L = 70$ m hosszú, $R = 10$ m sugarú félhenger alakú hangárt a tengelyére merőleges irányban $v_0 = 72$ km/óra sebességű szél fújja. Mekkora erő hat a hangárra, ha az A pontban levő ajtó nyitva van és a sebességteret az előző feladatban megadott potenciál írja le? (A levegő sűrűsége $1,2 \text{ kg/m}^3$.)



- 16.27. Az egymásra merőleges, félig végtelen \overline{OA} és \overline{OB} sík falak a koordináta-rendszer kezdőpontjában metszik egymást. A falak közötti tartomány (a, b) pontjában a ρ sűrűségű összenyomhatatlan folyadéknak Q intenzitású vonalszerű forrása van, mely a falak közötti tartományban kétdimenziós áramlást hoz létre. Határozzuk meg a nyomást a falak mentén!
Útmutatás: A határfeltételek kielégítésekor gondoljunk a tükrözés lehetőségére!
- 16.28. Hogyan módosítja a v_0 sebességű homogén áramlást az, ha az áramlásra merőlegesen egy $2h$ széles, vékony, hosszú lemezt helyezünk a folyadékba?
Útmutatás: Keressük meg a h mélységben bemetszett felső fél-sík konformis leképezését a teljes $\text{Im } z > 0$ félsíkra!
- 16.29. Egy nagykiterjedésű tartályban p_0 nyomású ideális folyadék van. A tartály falán egy a szélességű rést nyitunk. Írjuk le a sebességeloszlást és a kiáramló folyadék alakját!

Útmutatás: Az áramlást síkbeli potenciáláramlásnak tekinthetjük. Használjuk ki, hogy a fal mentén a sebesség irányát, a szabad folyadékfelszínre pedig a sebesség nagyságát ismerjük, és alkalmazzuk a

$$\zeta = -\ln \frac{dw}{dz} + \text{állandó}$$

konformis leképezést, ahol $w(z)$ a komplex sebességpotenciál!

- 16.30.** Összenyomhatatlan sűrűdő folyadék áramlik a $\Delta p = p_2 - p_1$ nyomáskülönbség hatására két végtelen, egymástól d távolságra levő párhuzamos sík között. Határozzuk meg a síkok között kialakuló sebesség- és nyomáseloszlást!
- 16.31.** Összenyomhatatlan sűrűdő folyadék áramlik egy szabályos háromszög keresztmetszetű csőben. Határozzuk meg a sebességeloszlást és az időegységenként átáramló folyadék tömegét!
- 16.32.** Határozzuk meg az r_1 belső és r_2 külső sugarú, gyűrű keresztmetszetű csövön átáramló sűrűdő folyadék sebességterét!
- 16.33.** Az r_1 és r_2 sugarú koaxiális hengerek között ($r_1 > r_2$) összenyomhatatlan sűrűdő folyadék található. Határozzuk meg a kialakuló folyadékáramlás sebességterét, ha
- a külső henger ω_1 szögsebességgel forog;
 - a belső henger ω_2 szögsebességgel forog;
 - mindkét henger ugyanabban az irányban forog ω_1 , illetve ω_2 szögsebességgel!
- 16.34.** Egy R sugarú merev gömböt nagykiterjedésű sűrűdő folyadékban állandó u sebességgel mozgatunk. Határozzuk meg a testre ható fékezőerőt, ha $u \ll \nu/R$!
- Útmutatás:* Keressük a linearizált Navier-Stokes egyenlet megoldását $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{A}$ alakban, és használjuk ki, hogy \mathbf{v} csak lineárisan függ u -tól!
- 16.35.** Egy R sugarú végtelen hengert η viszkozitású folyadékban állandó u sebességgel mozgatunk. A hosszegységre jutó fékezőerő dimenzionális okokból $\mathbf{F} = u \cdot \eta \cdot f(uR\varrho/\eta)$ alakú kell legyen. Mutassuk meg, hogy a mozgásegyenleteknek nincsen olyan megoldása, amely u -tól lineárisan függene, s emiatt $f(R)$ a Reynolds-számnak $R=0$ esetén szinguláris függvénye.

MEGOLDÁSOK

1. Műveletek vektorokkal

1.1. $2T = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|,$

$$\begin{aligned} 4T^2 &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{2ab - (a^2 + b^2 - c^2)}{2} \cdot \frac{2ab + (a^2 + b^2 - c^2)}{2} = \\ &= \frac{1}{4} [c^2 - (a-b)^2] [(a+b)^2 - c^2] = \\ &= \frac{1}{4} (c+b-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c). \end{aligned}$$

Bevezetve az $a+b+c = 2s$ jelölést:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

1.2. $|(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1)|.$

1.3. $\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{m}\right)^2 = c^2 + \frac{m^2}{4}$, tehát a kör középpontja $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{m}/2$, a sugara pedig: $R = \sqrt{c^2 + m^2/4}$.

1.4. Legyen a háromszög két oldalvektora \mathbf{a} , illetve \mathbf{b} , közbezárt szögük pedig γ ! A harmadik oldal ekkor $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. A skalárszorzat disztributivitása miatt

$$c^2 = \mathbf{c}^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{b} = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

1.5. Poláris vektorok pl.: a helyvektor, a sebesség, a gyorsulás, az erő, az elektromos térerősség. Axiálvektorok: a forgatónyomaték, a szögsebesség, a szöggyorsulás, a mágneses térerősség stb.

1.6. $m = \rho \cdot t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{S})$ (ρ a folyadék sűrűsége).

1.7. \mathbf{x} kifejezhető három (nem egy síkban fekvő) vektor, pl. \mathbf{a} , \mathbf{b} és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Ezt behelyettesítve az egyenletbe

$$\mathbf{a}[\alpha - \gamma(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})] + \mathbf{b}[\beta + \gamma \cdot a^2] + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})[\gamma - \beta - 1] = \mathbf{0}.$$

A szögletes zárójelekben álló kifejezéseknek \mathbf{a} , \mathbf{b} és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ lineáris függetlensége miatt külön-külön el kell tűnni. Az így kapott egyenletrendszerből

$$\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{1 + a^2}, \quad \beta = -\frac{a^2}{1 + a^2}, \quad \gamma = \frac{1}{1 + a^2}.$$

A fenti gondolatmenet nem jó akkor, ha \mathbf{a} és \mathbf{b} párhuzamosak. Ilyenkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, tehát az eredeti egyenlet

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

Ennek viszont csak az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lehet a megoldása, hiszen nincsen olyan vektor, amely önmagára merőleges lenne.

1.8. a) A megoldhatóság feltétele: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$; ekkor

$$\mathbf{x} = \frac{1}{a^2}(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \lambda \mathbf{a} \quad (\lambda \text{ tetszőleges szám}).$$

b) A megoldhatóság feltétele: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ és $\alpha = 0$; ekkor

$$\mathbf{x} = \frac{1}{a^2}(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \lambda \mathbf{a}.$$

c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ esetén $\mathbf{x} = \frac{1}{a^2}(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \frac{\alpha}{a^2} \mathbf{a}$.

d) Nincs megoldás.

e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ és $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ esetén $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a}}{a^2}$; különben nincs megoldás.

f) A megoldhatóság feltétele az, hogy \mathbf{a} és \mathbf{b} párhuzamosak legyenek. Ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, akkor minden \mathbf{x} megoldás, ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, akkor $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a}$ (λ tetszőleges szám).

2. Lineáris operátorok

2.1. A vetítés operátora \mathbf{r} -et az $\mathbf{r}' = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{r})\mathbf{e} \equiv (\mathbf{e} \circ \mathbf{e})\mathbf{r}$ vektorba viszi át. A $\mathbf{P} = \mathbf{e} \circ \mathbf{e}$ projekciós operátor négyzete önmaga:

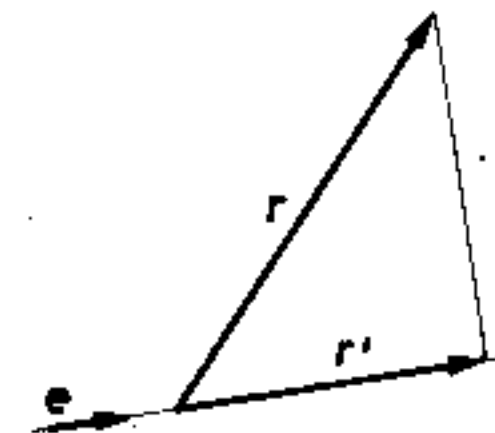
$$\mathbf{P}^2 = (\mathbf{e} \circ \mathbf{e})(\mathbf{e} \circ \mathbf{e}) = \mathbf{e}^2 \cdot (\mathbf{e} \circ \mathbf{e}) = \mathbf{P}.$$

A tükrözés operátora

$$\mathbf{T} = 2(\mathbf{e} \circ \mathbf{e}) - \mathbf{E}; \quad \mathbf{T}^2 = \mathbf{E} \quad (\mathbf{E} \text{ az egységoperátor}).$$

Valamely koordináta-rendszerben:

$$P_{ij} = e_i e_j; \quad T_{ij} = 2e_i e_j - \delta_{ij}.$$



2.2. $\mathbf{P} = \mathbf{E} - \mathbf{n} \circ \mathbf{n}; \quad \mathbf{T} = \mathbf{E} - 2\mathbf{n} \circ \mathbf{n}.$

2.3. a) Vetít az x -tengelyre, majd 90° -ot forgat. Inverze nincs; $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$, ha $n \geq 2$.

b) Vetít az y -tengelyre. Inverze nincs; $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ ($n \geq 1$).

c) Tükröz az $x = y$ egyenesre. Az inverze önmaga; $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$, ha n páratlan, páros n -re pedig $\mathbf{A}^n = \mathbf{E}$.

d) Forgat -90° -kal. Az inverze $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hatványai pedig:

$$\mathbf{O}^{4k+1} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{O}^{4k+2} = -\mathbf{E}, \quad \mathbf{O}^{4k+3} = -\mathbf{O}, \quad \mathbf{O}^{4k} = \mathbf{E}.$$

e) Vetít az x, y síkra, majd tükröz az $y = x$ egyenesre. Inverze nincs;

$$\mathbf{A}^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) 120° -os szöggel forgat az $x=y=z$ egyenes körül. Az inverze a négyzetével egyezik meg, általában pedig

$$A^{3k} = E, \quad A^{3k+1} = A, \quad A^{3k+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4. $O = O^{(x)}(-30^\circ) \cdot O^{(z)}(60^\circ) \cdot O^{(x)}(30^\circ) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ 0 & -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ 0 & \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}.$$

2.5. A transzformáció három lépésben kapható meg: először elforgatjuk a testet a z-tengely körül ψ szöggel, ezután az x-tengely körül ϑ szöggel, majd ismét a z-tengely körül φ szöggel.

$$O(\vartheta, \varphi, \psi) = O^{(z)}(\varphi) \cdot O^{(x)}(\vartheta) \cdot O^{(z)}(\psi),$$

ahol

$$O^{(z)}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

és

$$O^{(x)}(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

A három mátrix szorzata: $O(\vartheta, \varphi, \psi) =$

$$= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \vartheta & -(\sin \psi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta) & \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \cos \varphi \cos \vartheta & \cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi & -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

2.6. $O = O^{(z)}(\varphi) \cdot O^{(y)}(\vartheta) \cdot O^{(z)}(\psi) \cdot O^{(y)}(-\vartheta) \cdot O^{(z)}(-\varphi).$

2.7. Mivel a szögek kicsinyek,

$$O^{(x)}(\alpha) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad O^{(y)}(\beta) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bevezetve az alábbi jelöléseket:

$$AB - BA \equiv [A, B] \quad (A \text{ és } B \text{ kommutátora}),$$

$$O^{(x)}(\alpha) \approx E + \alpha \cdot T_1 \text{ stb.} \quad (T_i \text{ az } i\text{-edik koordinátatengely körüli forgatás generátora}),$$

a vizsgált kifejezés

$$[O^{(x)}(\alpha), O^{(y)}(\beta)] = [E + \alpha \cdot T_1, E + \beta \cdot T_2] = O^{(z)}(\alpha\beta) - E = \alpha \cdot \beta \cdot T_3.$$

A generátorok felcserélési szabálya tehát

$$[T_1, T_2] = T_3, \quad \text{általában pedig}$$

$$[T_i, T_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} T_k$$

3. Tenzoralgebra

$$3.1. \delta'_{ik} = \sum_{m,n} O_{im} O_{kn} \delta_{mn} = \sum_n O_{in} O_{kn} = (\mathbf{O}\mathbf{O})_{ik} = \delta_{ik}.$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy \mathbf{O} ortogonális mátrix.

$$\varepsilon'_{ijk} = \sum_{m,n,l} O_{im} O_{jn} O_{kl} \varepsilon_{mnl} = \mathbf{a}^{(i)} \cdot (\mathbf{a}^{(j)} \times \mathbf{a}^{(k)}),$$

ahol $\mathbf{a}^{(i)}$ az \mathbf{O} mátrix i -edik sorvektora. Mivel $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$ és $\mathbf{a}^{(3)}$ három, egymásra merőleges egységvektor, melyek jobbsodrású rendszert alkotnak,

$$\varepsilon'_{ijk} = \mathbf{a}^{(i)} \cdot (\mathbf{a}^{(j)} \times \mathbf{a}^{(k)}) = \varepsilon_{ijk}.$$

3.2. Ha \mathbf{a} invariáns vektor, akkor \mathbf{a} irányába választva az x -, majd az y -tengelyt

$$a_i \equiv (|\mathbf{a}|, 0, 0) = a'_i \equiv (0, |\mathbf{a}|, 0),$$

tehát $\mathbf{a} = 0$.

Legyen \mathbf{T} invariáns, kétindexes tenzor! Bontsuk föl \mathbf{T} -t szimmetrikus és antiszimmetrikus részekre:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \tilde{\mathbf{T}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \tilde{\mathbf{T}}) = \mathbf{T}^S + \mathbf{T}^A.$$

Ha \mathbf{T} invariáns, akkor \mathbf{T}^S és \mathbf{T}^A külön-külön is az. Az antiszimmetrikus rész kifejezhető a vektor invariánsával:

$$\mathbf{T}^A_{ij} = \sum_k \varepsilon_{ijk} a_k.$$

Mivel valódi invariáns vektor nincsen, ezért $\mathbf{T}^A = 0$, tehát \mathbf{T} szimmetrikus. Egy szimmetrikus mátrix mindig diagonalizálható, ha a koordináta-rendszert alkalmasan választjuk meg. Amennyiben a sajátértékek különbözőek lennének, úgy a tenzor nem lehetne invariáns, hiszen pl. a z -tengely körüli 90° -os forgatás fölcseréli az első két diagonális elemet. Így tehát \mathbf{T} egy reprezentációja

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot \delta_{ij}$$

és ez valóban invariáns.

Hasonlóan látható be, hogy valamennyi háromindexes invariáns tenzor $\lambda \cdot \varepsilon_{ijk}$ alakú.

3.3. Valamennyi átlagérték visszavezethető $\overline{n_i n_j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) meghatározására. Mivel a különböző irányokra átlagolunk, az $\overline{n_i n_j}$ mennyiség minden koordináta-rendszerben ugyanannyi, vagyis invariáns tenzor. A 3.2. feladat megoldása szerint

$$\overline{n_i n_j} = \lambda \cdot \delta_{ij}.$$

Másrészt legyen $i=j$ és összegezzünk i -re:

$$\sum_{i=1}^3 \overline{n_i n_j} = \overline{\mathbf{n}^2} = \overline{1} = 1 = 3\lambda,$$

ahonnan

$$\overline{n_i n_j} = \frac{1}{3} \cdot \delta_{ij}.$$

Ennek segítségével pl.:

$$\overline{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})^2} = \sum_{i,j} \overline{a_i n_i a_j n_j} = \sum_{i,j} a_i a_j \overline{n_i n_j} = \sum_{i,j} \frac{1}{3} \delta_{ij} a_i a_j = a^2/3;$$

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/3; \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{a}/3 \text{ stb.}$$

$$3.4. \sum_k \varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \cdot \delta_{jm} - \delta_{im} \cdot \delta_{jl}.$$

$$\begin{aligned} [(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}]_i &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_j \cdot c_k = \sum_{j,k,m,n} \varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{jmn} a_m b_n c_k = \\ &= \sum_{m,n,k} a_m b_n c_k \sum_j \varepsilon_{kij} \cdot \varepsilon_{jmn} = \sum_{m,n,k} a_m b_n c_k (\delta_{km} \cdot \delta_{in} - \delta_{im} \delta_{kn}) = \\ &= b_i \sum_k a_k c_k - a_i \sum_k b_k c_k = [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}]_i. \end{aligned}$$

$$3.5. a) \delta_{jm}\delta_{kn}\delta_{ls} + \delta_{js}\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{jn}\delta_{ks}\delta_{lm} - \\ - \delta_{js}\delta_{kn}\delta_{lm} - \delta_{jn}\delta_{km}\delta_{ls} - \delta_{jm}\delta_{ks}\delta_{ln}$$

$$b) 2\delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}$$

$$c) 6\delta_{lm}$$

$$d) 24.$$

3.6. Az $\mathbf{O} \cdot \tilde{\mathbf{O}} = \mathbf{E}$ ortogonalitási összefüggésből

$$\mathbf{O} \cdot \tilde{\mathbf{O}} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\Omega})(\mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}) \approx \mathbf{E} + \boldsymbol{\Omega} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{E},$$

tehát $\boldsymbol{\Omega} = -\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ antiszimmetrikus. Mivel minden antiszimmetrikus mátrix kifejezhető a vektorinvariánsával, $\boldsymbol{\Omega}$ is felírható az alábbi alakban:

$$\Omega_{ij} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \omega_k.$$

ω szemléletes jelentésének tisztázására határozzuk meg egy tetszőleges \mathbf{r} vektor képét:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{O} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{r},$$

$$x'_i = \sum_j O_{ij} x_j = \sum_j (\delta_{ij} + \Omega_{ij}) x_j = \\ = x_i + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \omega_k x_j = [\mathbf{r} + (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})]_i.$$

A vizsgált transzformáció tehát egy $\boldsymbol{\omega}$ irányú tengely körüli, $|\boldsymbol{\omega}|$ nagyságú infinitezimális forgatás.

3.7. $A'_{ij} = \sum_{k,l} O_{ik} O_{jl} A_{kl}$, tehát A_{ij} egy kétindexes tenzor.

4. Mátrixok és determinánsok

$$4.1. \lambda = -51/16.$$

$$4.2. P(1, 1, 1).$$

$$4.3. a) \det \mathbf{B}(\alpha) = 1;$$

$$b) \mathbf{B}(\alpha) \cdot \mathbf{B}(\beta) = \mathbf{B}(\alpha + \beta);$$

c) egymás inverzei.

4.4. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ semmilyen paraméterértékek mellett sem lehet nulla, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = 0$, ha $\alpha = 3$ és $\beta = 3/2$.

4.5. a) $\det \mathbf{A} \neq 0$ miatt nincsen.

b) $\det \mathbf{A} = 0$, így az $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ egyenletnek van nemtriviális megoldása:

$$\mathbf{x} = \text{állandó} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ egyenlet legáltalánosabb megoldása emiatt:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{pmatrix}, \quad (c_1, c_2 \text{ és } c_3 \text{ tetszőleges állandók}).$$

4.6. Mindegyik oszlopból levonva az előtte levő x_1 -szeresét a

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \cdot V_{n-1}$$

rekurziós összefüggést kapjuk, ahonnan

$$V_n = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

$$4.7. D_n = (x + na - a) \cdot (x - a)^{n-1}.$$

$$4.8. \frac{\partial}{\partial A_{ik}} (\det \mathbf{A}) = (\text{adj } \mathbf{A})_{ik} = (\mathbf{A}^{-1})_{ik} \cdot \det \mathbf{A}.$$

4.9. A bal oldal átlósösszege nulla, a jobb oldalé pedig n .

5. Sajátértékek, sajátvektorok, főtengety-transzformáció

5.1. Bontsuk fel \mathbf{r} -et \mathbf{t} irányú és arra merőleges vektorokra:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}}{t^2} + \left[\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}}{t^2} \right], \\ \mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r} &= 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}}{t^2} + \left[\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}}{t^2} \right] = \\ &= \left[\mathbf{E} + \frac{2}{t^2}(\mathbf{t} \circ \mathbf{t}) \right] \mathbf{r} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{r}.\end{aligned}$$

Az \mathbf{M} mátrix az $(1, -1, 0)$ tengely irányában 3-szorosan nyújt.

$$5.2. \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = 3 \cdot \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r})}{n^2} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r})}{n^2} \right) = \left[3 \frac{\mathbf{n} \circ \mathbf{n}}{n^2} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{n} \circ \mathbf{n}}{n^2} \right) \right] \mathbf{r},$$

ahol $\mathbf{n} = (1, 5)$.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{52} \begin{pmatrix} 31 & 25 \\ 25 & 151 \end{pmatrix}; \quad \det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 3/2.$$

5.3. A $\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

alakú, melynek gyökei $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -2$. Az első sajátértékhez tartozó sajátvektort a

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

egyenlet megoldásából kaphatjuk meg: $x = 2y$, y tetszőleges.

Egy lehetséges megoldás: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ez azonban nem egy-

$$4.10. \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -b_3 & a_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{ahol} \quad a_3 = a_1 a_2 - b_1 b_2,$$

$$b_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

Megjegyzés

Ugyanezek a műveleti szabályok érvényesek az $a + ib$ alakú komplex számokra is!

$$4.11. \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix},$$

ahonnan a determinánsok szorzástétele alapján

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

A jobb oldal első mátrixa egy háromszögmátrix, melynek determinánsa 1, a második tényező pedig

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} \cdot \det(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) &= \det(\mathbf{A}\mathbf{D} - \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) = \\ &= \det(\mathbf{A}\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{C}).\end{aligned}$$

ségvektor, a hossza $\sqrt{5}$. A normált sajátvektor

$$\mathbf{s}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hasonló számolással a második sajátvektorra

$$\mathbf{s}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Mint az \mathbf{M} szimmetrikus voltából következik, a két sajátvektor merőleges egymásra: $\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{s}^{(2)} = 0$.

5.4. A sajátvektorok által kifeszített koordináta-rendszerben a transzformáció mátrixa

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ alakú, vagyis}$$

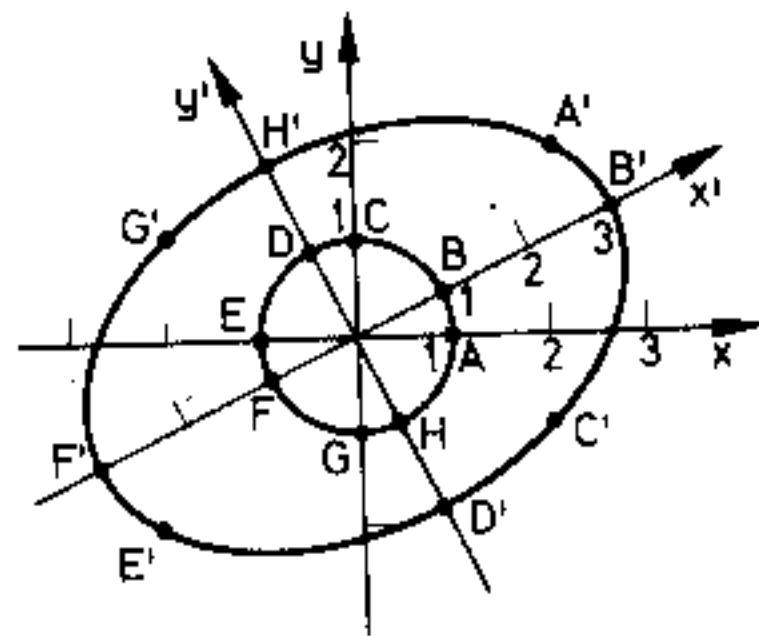
$$x' = 3x,$$

$$y' = -2y.$$

Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör képének egyenlete

$$\left(\frac{x'}{3}\right)^2 + \left(\frac{y'}{2}\right)^2 = 1$$

ellipszist ír le, melynek féltengelyei éppen a sajátértékek abszolút értékével egyeznek meg, irányuk pedig a sajátvektorok irányába mutat. Az ábrán a kör néhány jellegzetes pontját és ezek képét tüntettük fel.



5.5. A karakterisztikus egyenlet: $-\lambda^3 + 12\lambda^2 + 27\lambda = 0$.

A sajátértékek: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 13,94$; $\lambda_3 = -1,94$.

A normált sajátvektorok:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,96 \\ -0,19 \\ -0,19 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,24 \\ 0,49 \\ 0,70 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,05 \\ 0,81 \\ -0,58 \end{pmatrix}.$$

5.6. a) A forgástengely irányába mutató vektor sajátvektor $\lambda_1 = 1$ sajátértékkal. A másik két sajátérték komplex: $\lambda_{2,3} = e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$ (α a forgatás szöge).

b) A forgástengely iránya: $\mathbf{n} = (-0,95; -0,22; 0,22)$, a forgatás szöge: $\alpha = 93^\circ$.

c) A karakterisztikus egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggésből

$$\sum_i O_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 1 + 2 \cos \alpha.$$

5.7. Az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -22 \\ 26 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ és $c = 35$ jelölésekkel $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} + c = 0$. Az $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$ koordinátatranszformációval (eltolással) a lineáris tag eltüntethető, ha

$\mathbf{r}_0 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}/2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Az állandó tag eközben $c' = c - \frac{1}{4}\mathbf{b}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = -2$ értékre változik:

$$\mathbf{r}'\mathbf{A}\mathbf{r}' + c' = 0.$$

Az \mathbf{A} mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 2$, a megfelelő normált sajátvektorok pedig

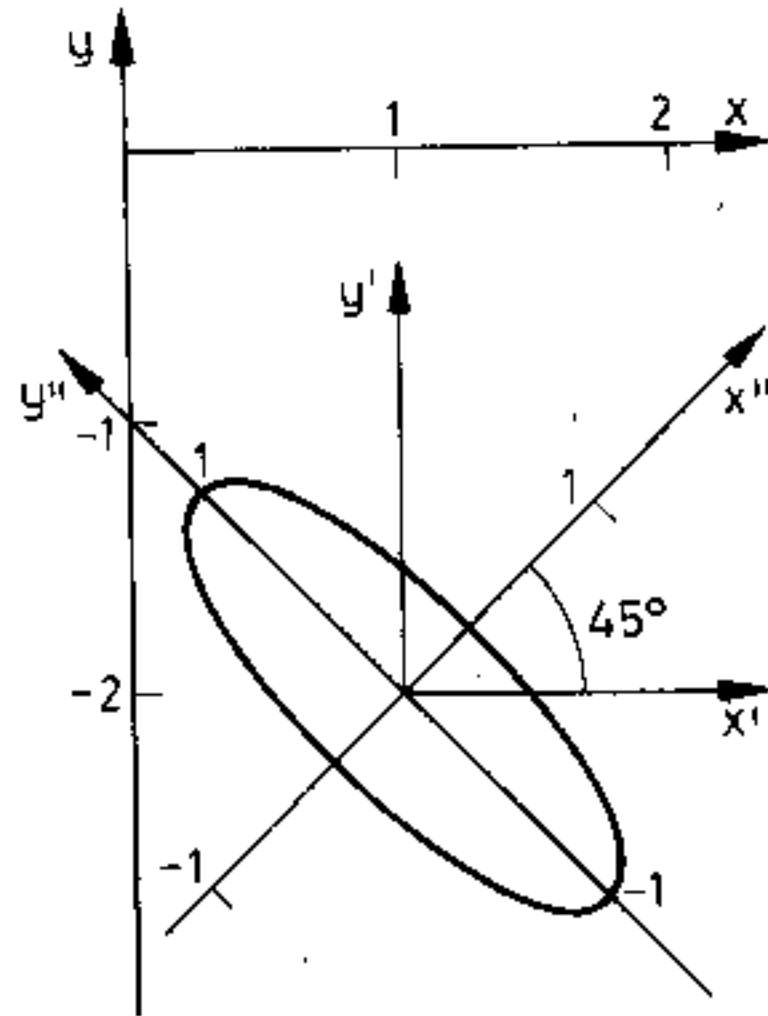
$$\mathbf{s}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{s}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az $\mathbf{O} = (\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ortogonális transzformáció-

val \mathbf{A} diagonalizálható: $\tilde{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, tehát az $\mathbf{r}'' = \tilde{\mathbf{O}}\mathbf{r}'$ forgatással nyert vektor komponenseiben nézve a görbe egyenlete kanonikus alakú:

$$4x''^2 + y''^2 = 1.$$

Ez ellipszis, melynek féltengelyei: $a = 1/2$ és $b = 1$. Az \mathbf{O} mátrix $\varphi = -\arctg \frac{s_2^{(1)}}{s_1^{(1)}} = 45^\circ$ -os forgatást hajt végre; ekkora szöveget zár be az x'' -tengely az eredeti koordináta-rendszer x -tengelyével.



5.8. Hiperbolikus paraboloidot.

5.9. $D_n(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{M}) =$

$$= \begin{vmatrix} -2 \cos \vartheta & 1 & 0 & \dots \\ 1 & -2 \cos \vartheta & 1 & \dots \\ 0 & 1 & -2 \cos \vartheta & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & & & 1 & \dots \\ & & & & & & -2 \cos \vartheta \end{vmatrix}$$

Rekurzióval belátható, hogy $D_n = (-1)^n \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin \vartheta}$, a sajátértékek tehát:

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \frac{\vartheta_k}{2}, \quad \vartheta_k = \frac{\pi}{n+1} k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

A k -adik normált sajátvektor:

$$\mathbf{s}^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left(\sin \frac{k\pi}{n+1}, \sin \frac{2k\pi}{n+1}, \dots, \sin \frac{nk\pi}{n+1} \right).$$

5.10. $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0,$

$$\mathbf{O}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{O} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv \mathbf{D}.$$

A tetszőleges hatványsorral értelmezett függvényére

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) &= c_0 + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2 + \dots = \\ &= \mathbf{O}(c_0 + c_1\mathbf{D} + c_2\mathbf{D}^2 + \dots)\mathbf{O}^{-1} = \\ &= \mathbf{O} \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_3) \end{pmatrix} \mathbf{O}^{-1}. \end{aligned}$$

Jelen esetben

$$\sin(\mathbf{A}\varphi) = \mathbf{O} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \mathbf{O}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Közvetlenül is megkaphatjuk ezt az eredményt, ha kihasználjuk, hogy \mathbf{A} kielégíti az $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$ minimálegyenletet.

$$\begin{aligned}\sin(\mathbf{A}\varphi) &= \varphi\mathbf{A} - \frac{1}{3!}\varphi^3\mathbf{A}^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5\mathbf{A}^5 - \dots = \\ &= \mathbf{A}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots\right) = \mathbf{A}\sin\varphi.\end{aligned}$$

5.11. a) $\lambda_1 = 1, \quad \mathbf{s}^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix};$

$$\lambda_2 = -1, \quad \mathbf{s}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \lambda_1 \cdot \mathbf{s}^{(1)} \circ \mathbf{s}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{s}^{(2)} \circ \mathbf{s}^{(2)} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha) - \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot (-\sin\alpha, \cos\alpha).\end{aligned}$$

b) $\sin(\beta\mathbf{A}) = \mathbf{A}\sin\beta,$

$$\cos(\beta\mathbf{A}) = \mathbf{E}\cos\beta.$$

5.12. Az \mathbf{A} mátrix különböző sajátértékeihez tartozó jobb oldali és bal oldali sajátvektorai merőlegesek egymásra, ezért a jobb oldali sajátvektorokból (mint oszlopvektorokból) képzett

$$\mathbf{C} = (\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \mathbf{s}^{(3)})$$

mátrix az \mathbf{A} -t diagonalizálja:

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

(Ha \mathbf{A} szimmetrikus, akkor \mathbf{C} ortogonális mátrix, azaz $\mathbf{C}^{-1} = \check{\mathbf{C}}$.)

A megoldandó egyenletet

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^2\mathbf{C} = (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C})(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}) = \mathbf{D}$$

alakra hozhatjuk, s innen

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix} \mathbf{C}^{-1}.$$

A megoldhatóságnak az a feltétele, hogy \mathbf{A} -nak ne legyen negatív sajátértéke. A fentebbi módszer közvetlenül nem alkalmazható akkor, ha a karakterisztikus egyenletnek többszörös gyökei is vannak.

Az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^2$ egyenletnek négy különböző megoldása van:

$$\mathbf{B} = \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{B} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.13. a) $\pi/\sqrt{3},$

b) $\sqrt{\frac{\pi^n}{\det \mathbf{M}}}.$

5.14. A transzformáció geometriai jelentéséből következik, hogy \mathbf{O} -nak egyetlen valós sajátértéke és sajátvektora sem lehet. Formálisan komplex megoldásokat is megengedve a

$$\lambda^2 - 2\lambda \cos\varphi + 1 = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei:

$$\lambda_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi \equiv e^{i\varphi}, \quad \text{illetve}$$

$$\lambda_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi \equiv e^{-i\varphi}.$$

A megfelelő sajátvektorok:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

6. Vektoranalízis

6.1. a) $\operatorname{div} \mathbf{v} = (3+n)r^n,$

$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$

b) $\operatorname{div} \mathbf{v} = n(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})r^{n-2},$

$\operatorname{rot} \mathbf{v} = n \cdot r^{n-2}(\mathbf{r} \times \mathbf{a}).$

c) $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$

$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{a}(n+2)r^n - \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \cdot n \cdot r^{n-2}.$

d) $\operatorname{div} \mathbf{v} = (n+4)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})r^n,$

$\operatorname{rot} \mathbf{v} = (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot r^n.$

e) $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}),$

$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}(\mathbf{r} \times \mathbf{a}).$

f) $\operatorname{div} \mathbf{v} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r},$

$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 3\mathbf{a} \times \mathbf{r}.$

6.2. $(\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi)_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \partial_j (\operatorname{grad} \Phi)_k = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = 0,$ mert

$\partial_j \cdot \partial_k \Phi$ szimmetrikus (j, k) -ban $\left(\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \sum_k \partial_k (\operatorname{rot} \mathbf{v})_k = \sum_{k,l,m} \varepsilon_{klm} \partial_k \partial_l v_m = 0.$

$(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \partial_j (\operatorname{rot} \mathbf{v})_k =$

$= \sum_{j,k,l,m} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l v_m =$

$= \sum_{j,l,m} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l v_m =$

$= \partial_i \sum_m \partial_m v_m - \sum_m \partial_m \partial_m v_i = (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v})_i.$

6.3. a) $\operatorname{div} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \sum_k \partial_k \left(\sum_{l,m} \varepsilon_{klm} u_l v_m \right) =$
 $= \sum_{k,l,m} \varepsilon_{klm} (u_l \partial_k v_m + v_m \partial_k u_l) =$
 $= \sum_m v_m \left(\sum_{k,l} \varepsilon_{mkl} \partial_k u_l \right) - \sum_l u_l \left(\sum_{k,m} \varepsilon_{lkm} \partial_k v_m \right) =$
 $= \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{v}.$

b) $\operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} \partial_k (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_l =$
 $= \sum_{k,l,m,n} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{lmn} \partial_k (u_m v_n) =$
 $= \sum_{k,m,n} (\delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}) (u_m \partial_k v_n + v_n \partial_k u_m) =$
 $= u_i \sum_k (\partial_k v_k) + \sum_k (v_k \partial_k) u_i - \sum_k (u_k \partial_k) v_i - v_i \sum_k (\partial_k u_k) =$
 $= [\mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \operatorname{grad}) \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u}]_i.$

c) $\operatorname{rot} (\Phi \mathbf{u})_i = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} \partial_k (\Phi \mathbf{u})_l =$
 $= \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} (\Phi \partial_k u_l + u_l \partial_k \Phi) =$
 $= [\Phi \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \Phi) \times \mathbf{u}]_i.$

d) Célszerű először az $\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}$ szorzatot kiszámítani:

$[\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}]_i = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} u_k (\operatorname{rot} \mathbf{v})_l =$
 $= \sum_{k,l,m,n} \varepsilon_{ikl} u_k \varepsilon_{lmn} \partial_m v_n =$
 $= \sum_{k,m,n} (\delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}) u_k \partial_m v_n =$
 $= \sum_k u_k \partial_i v_k - \sum_k u_k \partial_k v_i.$

Az utolsó tag éppen az $-(\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}$ vektor i -edik komponense, így tehát

$[\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v}]_i = \sum_k u_k \partial_i v_k.$

Cseréljük fel \mathbf{u} -t és \mathbf{v} -t, majd adjuk össze a két azonosságot:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u} + (\mathbf{u} \text{ grad})\mathbf{v} + (\mathbf{v} \text{ grad})\mathbf{u}]_i = \\ & = \sum_k u_k \partial_i v_k + v_k \partial_i u_k = \sum_k \partial_i (v_k u_k) = [\text{grad } (\mathbf{u}\mathbf{v})]_i. \end{aligned}$$

6.4. Egy pontszerű dipól potenciálja:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{p}}} \left(\frac{e}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} - \frac{e}{|\mathbf{r}|} \right) = -e\mathbf{a} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

A térerősség:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \Phi = -\text{grad} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \\ &= -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \text{grad } r^{-3} + r^{-3} \text{grad } (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}}{r^5}. \end{aligned}$$

$$6.5. \text{rot} \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{r}}{r^3} = r^{-3} \text{rot} (\mathbf{p} \times \mathbf{r}) + \text{grad } r^{-3} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}}{r^5}.$$

Ez a vektormező egy sztatikus dipól terével egyezik meg (lásd a 6.4. feladat megoldását):

$$\text{rot} \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{r}}{r^3} = \text{grad} \left(-\frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (r \neq 0),$$

egy dipóltér tehát megkapható skalármező gradienseként (magneto-, illetve elektrosztatika), de egy vektormező rotációjaként is (köráram mágneses tere)!

$$6.6. \text{ a) } \frac{\partial v_z}{\partial x} = -1 \text{ és } \frac{\partial v_z}{\partial y} = 2z, \text{ ahonnan } v_z(x, y, z) = 2yz - x + f'(z) \text{ (} f(z) \text{ tetszőleges függvény).}$$

$$\text{ b) } \Phi(x, y, z) = y(x^2 + y^2/3 + z^2) - zx + f(z).$$

$$6.7. \text{ a) } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = (-4x + y, x).$$

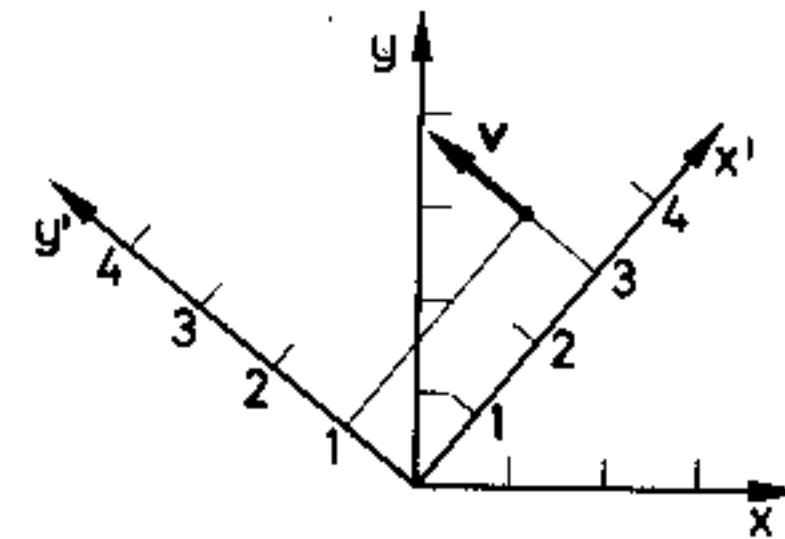
$$\text{ b) } \mathbf{v}_{x=1, y=3} = (-1, 1).$$

$$\begin{aligned} \text{ c) } \Phi'(x', y') &= \Phi[x(x', y'), y(x', y')] = \\ &= -\frac{6}{25} x'^2 + \frac{41}{25} x' y' - \frac{44}{25} y'^2. \end{aligned}$$

$$\text{ d) } \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x'}, \frac{\partial \Phi'}{\partial y'} \right) \Big|_{x'=3, y'=1} = \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5} \right).$$

$$\text{ e) } \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \\ -4 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

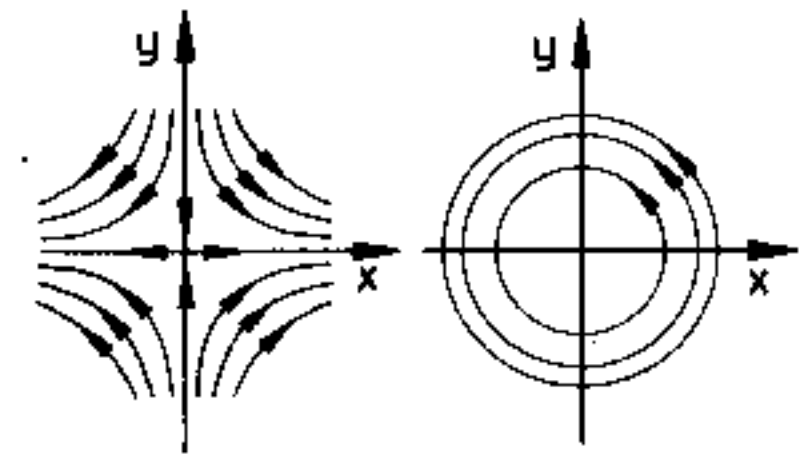
vagyis ugyanazon forgásmátrix kapcsolja össze $(\text{grad } \Phi)'$ -t $\text{grad } \Phi$ -vel, mint amelyik \mathbf{r}' -t \mathbf{r} -rel. Ez annyit jelent, hogy $\text{grad } \Phi$ komponensei vektorként transzformálódnak a koordináta-rendszer elforgatásakor. A különböző koordináta-rendszerekben felrajzolt (v_x, v_y) , illetve (v'_x, v'_y) számpárok ugyanazt az irányított szakaszt tüzik ki a síkon, ugyanannak a vektornak különböző reprezentánsai.



6.8. a) Az erővonalak paraméteres alakjának differenciálegyenletei:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x = 2x,$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = v_y = -2y.$$



Ezek megoldása: $x \cdot y = \text{állandó}$ (hiperbolareg).

- b) Koncentrikus körök.
c) Nem szemléltethető, mert $\text{div } \mathbf{v} \neq 0$.

6.9. a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, illetve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

b) $x = a \cdot \cos v \cdot \text{ch } u$,
 $y = b \cdot \sin v \cdot \text{ch } u$,
 $z = c \cdot \text{sh } u$.

A felület egy egyköpenyű elliptikus hiperboloid.

c) $d\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot du \, dv = \begin{pmatrix} -bc \cdot \text{ch}^2 u \cdot \cos v \\ -ac \cdot \text{ch}^2 u \cdot \sin v \\ ab \cdot \text{sh } u \cdot \text{ch } u \end{pmatrix} \cdot du \cdot dv$.

6.10. Alkalmazva a Gauss–Ostrogradszkij-tételt:

$$I = \iiint (\text{div } \mathbf{r}) \, dV = 3V_0 = 108\pi, \quad \text{ahol} \quad V_0 = \frac{4\pi}{3} \cdot 3^3$$

az integrációs tartomány térfogata.

6.11. A Gauss–Ostrogradszkij-tétel segítségével:

$$\begin{aligned} \oiint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} &= \iiint \text{div } \mathbf{v} \, dV = \iiint (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) \, dV = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^a r^2 \, dr \cdot 3r^2 = \frac{12a^5\pi}{5} \end{aligned}$$

Közvetlen számolással:

$$\begin{aligned} \oiint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} d\vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot a^2 \cdot a^3 \times \\ &\times [\sin^4 \vartheta \cos^4 \varphi + \sin^4 \vartheta \sin^4 \varphi + \cos^4 \vartheta] = \\ &= 2\pi \cdot a^5 \cdot 2 \left(\frac{8}{15} \cdot \frac{3}{8} + \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{5} \right) = \frac{12 \cdot a^5 \cdot \pi}{5} \end{aligned}$$

6.12. $V = \frac{1}{3} \iiint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{F}; \quad F = \oint x \cdot dy = -\oint y \, dx$.

6.13. a) aV_0 .

b) aV_0 (V_0 a tartomány térfogata).

6.14. Mivel a vizsgált erőter a $\Phi(r) = kQ/r$ potenciál negatív gradiense, a végzett munka csak a végpontok helyétől függ, az út alakjától nem.

$$\begin{aligned} W &= q \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -q \int_{r_1}^{r_2} \text{grad } \Phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \\ &= -q[\Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1)] = \\ &= -kQq \left(\frac{1}{|r_2|} - \frac{1}{|r_1|} \right) = 0. \end{aligned}$$

6.15. Az I-es úton végzett munka

$$W_I = \int_{(I)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 E_x(x, y=0) \cdot dx + \int_0^2 E_y(x=1, y) \, dy = 10.$$

Hasonlóan,

$$W_{II} = \int_0^2 E_y(x=0, y) \, dy + \int_0^1 E_x(x, y=2) \, dx = -10.$$

A kétféle munkavégzés különböző, ami nem meglepő, hiszen $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ rotációja nem nulla s így a térerősség nem származtatható potenciálgradiensként.

6.16. $\int_{(G_a)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 9\pi - 3d; \quad \int_{(G_b)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 3d$.

A két vonalintegrál $d = 3\pi/2$ esetben egyezik meg, ebből azonban rot \mathbf{v} -re lokálisan semmit nem állíthatunk.

6.17. $F = 4R^2$. (A maga korában ez az eredmény azért okozott meglepetést, mert az első példa volt olyan, görbe vonalakkal határolt felületre, melynek felszínképletében nem szerepel a π .)

6.18. $\iint_{(\text{palást})} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} = \pi; \quad \oint \mathbf{v} \, dr = \pi$.

6.19. A nincs értelmezve a negatív z-tengely mentén. Ezen vonaltól eltekintve

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r^3} \mathbf{r},$$

ami egy egységnyi erősségű „mágneses monopólus” terét írja le. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel alkalmazhatóságának matematikai feltételei a „szinguláris szál” miatt nem teljesülnek.

6.20. $(\text{grad } \Phi)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (a_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (a_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3} (a_3 h_1 h_2) \right],$$

$$(\text{rot } \mathbf{a})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 a_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 a_2) \right] \quad \text{stb.}$$

Például gömbi polárkoordinátákban

$$(dr)^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2,$$

ahonnan $h_r = 1$, $h_\varphi = r \sin \vartheta$, $h_\vartheta = r$.

$$(\text{grad } \Phi)_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad (\text{grad } \Phi)_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi};$$

$$(\text{grad } \Phi)_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}.$$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot a_\vartheta).$$

$$(\text{rot } \mathbf{a})_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (a_\varphi \sin \vartheta) - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \varphi} \quad \text{stb.}$$

MECHANIKA

7. Alapfogalmak (kinetika, Newton-törvények, megmaradási tételek)

7.1. A dugattyú helyzete $x = R \cos \alpha + l \cos \beta$.

A lendkerék egyenletes forgása miatt $\alpha = \omega t$. Mivel α és β között a kapcsolat: $R \sin \alpha = l \sin \beta$, így $x(t) = R \cos \omega t + l \cos \left[\arcsin \left(\frac{R}{l} \sin \omega t \right) \right]$.

7.2. A tapadás feltétele az üreg falánál: $v = \frac{R-r}{2} \Omega$, a hengerek

érintkezésénél pedig: $v + \frac{1}{2}(R-r)\Omega = \omega r$. Ezekből $v = \frac{r\omega}{2}$ és

$$\Omega = \frac{r}{R-r} \omega.$$

7.3. A kerületi pont mozgása két mozgás (a henger egyenletes haladó mozgásának és a középpont körüli egyenletes forgó mozgásának) eredője.

A kerületi pont pillanatnyi helyzete

$$x = x_0 + vt + R \cos \varphi$$

$$y = R(1 + \sin \varphi), \quad \varphi = \omega t.$$

A csúszásmentesség miatt $v = R\omega$, tehát a pálya az

$$x = x_0 + vt + R \cos \frac{v}{R} t$$

$$y = R \left(1 + \sin \frac{v}{R} t \right)$$

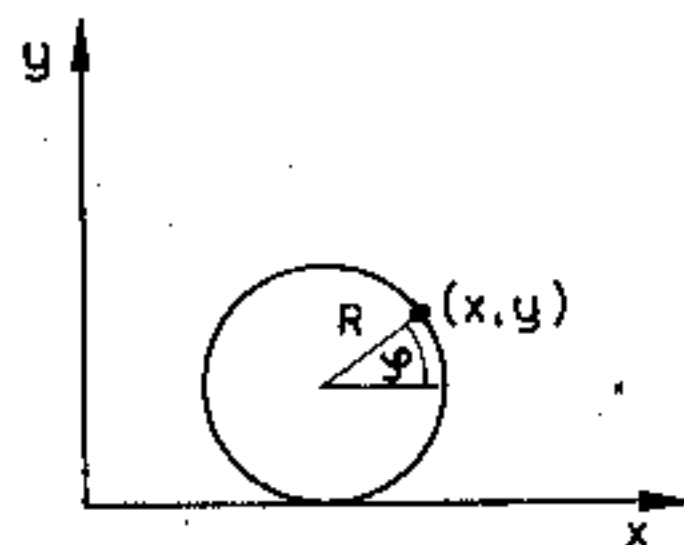
egyenletekkel leírt ciklois. A sebesség- és gyorsuláskomponensek:

$$v_x = \dot{x} = v \left(1 - \sin \frac{v}{R} t \right)$$

$$v_y = \dot{y} = v \cos \frac{v}{R} t$$

$$a_x = \dot{v}_x = -\frac{v^2}{R} \cos \frac{v}{R} t$$

$$a_y = \dot{v}_y = -\frac{v^2}{R} \sin \frac{v}{R} t.$$



(Természetesen a gyorsulás csak az egyenletes forgómozgásból ered.)

7.4. $v_r = 0$, $v_\varphi = 2\alpha R t$, $a_\varphi = 2\alpha R$, $a_r = -4R\alpha^2 t^2$.

7.5. A szimmetrikus sebességeloszlás miatt elegendő azt kiszámolni, hogy mennyivel sodor le a víz a folyó közepének eléréséig, t idő elteltével a csónak y koordinátája $y = l - ut$. A folyó közepét a csónak l/u idő múlva éri el; így a teljes folyóirányú elmozdulás:

$$2 \int_0^{l/u} v_0 \left(1 - \frac{[l-ut]^2}{l^2} \right) dt = \frac{4}{3} \frac{v_0}{u} l.$$

7.6. A hangyának a rögzített megfigyelőhöz viszonyított sebessége két részből tevődik össze: az x helyen a fonál nyújtása miatt uralkodó „lokális sebességből” $\left(\frac{x}{l(t)} c = \frac{x}{l_0 + ct} c \right)$, és a fonálhoz viszonyított v sebességből:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t)}{l_0 + ct} c + v.$$

Ennek az inhomogén lineáris differenciálegyenletnek az $x(t_0) = \xi_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$x(t) = e^{-F(t)} \left(\xi_0 + \int_{t_0}^t v e^{F(\tau)} d\tau \right), \quad F(t) = - \int_{t_0}^t \frac{c}{l_0 + c\tau} d\tau.$$

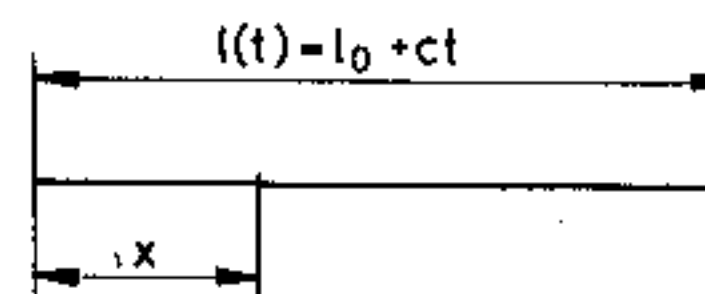
Esetünkben $\xi_0 = 0$, $t_0 = 0$, így

$$x(t) = (l_0 + ct) \frac{v}{c} \ln \frac{l_0 + ct}{l_0}.$$

A hangya azon t_1 időpillanatban éri utol a manót, amikor $x(t_1) = l_0 + ct_1$, azaz ha

$$\frac{v}{c} \ln \frac{l_0 + ct_1}{l_0} = 1. \quad \text{Innen} \quad t_1 = \frac{l_0}{c} \left(e^{\frac{c}{v}} - 1 \right).$$

(Ha a hangya a manótól indul, akkor is ugyanannyi idő alatt éri el.)



7.6. II. megoldás

Ha a hosszúság mértékegységét időfüggőnek választjuk és $l(t)/l_0$ arányban „nyújtjuk”, akkor ilyen mértékegységekben mérve a fonál hossza állandó marad, a hangya sebessége pedig

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v \frac{l_0}{l(t)}.$$

Innen

$$\int_0^{t_1} dx = v l_0 \int_0^{t_1} \frac{dt}{l_0 + ct},$$

tehát

$$l_0 = v \frac{l_0}{c} \ln \frac{l_0 + ct_1}{l_0}.$$

7.7. A $t \leq 50$ s tartományban a rakéta egyenletesen gyorsul:

$$x = gt^2, \quad v = 2gt,$$

$t > 50$ s esetén pedig a függőleges hajtás

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2$$

$$v = v_0 - g(t - t_0)$$

egyenletei írják le a mozgást. Itt $t_0 = 50$ s, $v_0 = 2gt_0 = 1000$ m/s a gyorsulási szakaszban elért sebesség, $x_0 = gt_0^2 = 25$ km pedig az ezalatt elért magasság. A legnagyobb magasság, ameddig a rakéta eljut: $3gt_0^2 = 75$ km.

7.8.

$$x(t) = v_1 t; \quad y(t) = 0; \quad z(t) = h + v_2 t - \frac{g}{2} t^2.$$

$v_1 = 0, v_2 > 0$: függőleges hajtás felfelé;

$v_1 = 0, v_2 < 0$: függőleges hajtás lefelé.

7.9. A téglák \mathbf{K} nagyságú erőt gyakorolnak egymásra, így mozgásegyenletük:

$$m_1 a_1 = \mathbf{F} - \mathbf{K}, \quad m_2 a_2 = \mathbf{K}.$$

Áthatolhatatlanságuk miatt $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$, így a mozgásegyenletekből

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{K} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{F}.$$

7.10. Legyen az i -edik és $(i+1)$ -edik téglatest között fellépő erő K_i . Így az i -edik téglá mozgásegyenlete $K_{i-1} - K_i = MA_i$ ($i \neq 1, N$), illetve a szélső testekre $F - K_1 = MA_1$, illetve $K_{N-1} = MA_N$.

Adjuk össze a mozgásegyenleteket és használjuk ki, hogy a testek áthatolhatatlansága miatt $A_1 = A_2 = \dots = A_N = a$: $F = NMa$, azaz a közös gyorsulás $a = \frac{F}{NM}$. (Vegyük észre,

hogy NM éppen a téglák össztömege!) A gyorsulás ismeretében a mozgásegyenletekből a K_i erőket meghatározhatjuk:

$$K_1 = F - MA_1 = F \left(1 - \frac{1}{N}\right); \quad K_i = K_{i-1} - Ma = F \left(1 - \frac{i}{N}\right).$$

7.11. a), b) Jelöljük a kötélen ható erőt K -val! A mozgásegyenletek:

$$M_2 a_2 = F - M_2 g - K$$

$$M_1 a_1 = K - M_1 g.$$

A kötélen nyújthatatlansága miatt $a_1 = a_2 = a$. Így

$$a = \frac{F}{M_1 + M_2} - g, \quad K = \frac{M_1}{M_1 + M_2} F. \quad (1)$$

c) Közvetlenül az elszakadás után M_1 -re csak saját súlya hat, tehát szabadon esik, a felvonó mozgásegyenlete pedig

$$M_2 a = F - M_2 g, \quad \text{azaz} \quad a = \frac{F}{M_2} - g. \quad (2)$$

d) Legyen a szakadáskor a felvonó és az M_1 közös sebessége v ! A szakadás után M_1 szabadon esik, M_2 pedig a (2)-beli gyorsulással mozog tovább felfelé. Ha a távolságokat a felvonó padlójának az elszakadásakor elfoglalt helyzetétől mérjük, akkor

$$x_1 = s + vt - \frac{g}{2} t^2$$

$$x_2 = \left(\frac{F}{M_2} - g\right) \frac{t^2}{2} + vt.$$

A padlóra érskor $x_1 = x_2$, innen $t = \sqrt{\frac{2sM_2}{F}}$.

7.12. Az elégetés előtti állapotban $m_1g + K - F = 0$, $m_2g - K = 0$, ahol K a rugóerő, F pedig a fonálban ható erő. Közvetlenül a fonal elégetése után a rugó továbbra is nyújtott állapotban lesz, tehát K nem változik. Így ebben a pillanatban

$$m_1 a_1 = m_1 g + K = (m_1 + m_2)g$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - K = 0.$$

7.13. Amíg $F(t)$ kisebb, mint a tapadó súrlódás maximális értéke (μmg), addig a test áll. Ez $t < t_1$ időkre teljesül, ahol t_1 -et az

$$F(t_1) = F_0 \frac{t_1}{\tau} = \mu mg \text{ összefüggésből nyerjük. Ezután a test}$$

$$a(t) = \frac{F_0}{m} \frac{t}{\tau} - \mu g \text{ gyorsulással fog mozogni.}$$

7.14. Az egyensúly feltétele:

$$\operatorname{tg} \alpha - \mu < \frac{F}{mg \cos \alpha} < \operatorname{tg} \alpha + \mu.$$

Ha $\mu > \operatorname{tg} \alpha$, akkor F negatív is lehet; ez annak felel meg, hogy a lejtőn lefelé toljuk a testet.

7.15. Helyben marad, mert $\mu > \operatorname{tg} \alpha = 0,58$.

7.16. Ha a test csúszik, akkor gyorsulása μg . (Ennek az a feltétele, hogy a kendő gyorsulása legalább μg legyen. Ellenkező esetben a test a kendőn marad.) Ha a test helyzetét a kendő másik végpontjától mérjük, akkor $x_1(t) = \frac{1}{2} \mu g t^2 + l$. A kendő vég-

pontjának helyzete $x_2(t) = \frac{1}{2} a t^2$. A test akkor hagyja el a ken-

dőt, amikor $x_1(t_1) = x_2(t_1)$, azaz $t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a - \mu g}}$. Ekkor a sebessége

$$v = \mu g t_1 = \mu g \sqrt{\frac{2l}{a - \mu g}}.$$

7.17. A mozgásegyenlet $m\ddot{r} = \mathbf{K} + m\mathbf{g} + \mathbf{S}$. Itt \mathbf{K} a golyó és a drót közötti nyomóerő, \mathbf{S} pedig a súrlódási erő: $\mathbf{S} = -\mu |\mathbf{K}| \mathbf{e}_\varphi$. Mint-hogy z irányban nincs mozgás, a mozgásegyenlet hengerkoordinátákban:

$$R\ddot{\varphi} = -\mu |\mathbf{K}|, \quad 0 = K_z - mg, \quad R\dot{\varphi}^2 = K_r.$$

Innen $\varphi = u$ helyettesítéssel: $R\dot{u} = -\mu \sqrt{g^2 + R^2 u^4}$ adódik. Az $u(t)$ függvény meghatározása elliptikus integrálra vezet, de számunkra elég az $u(\varphi)$ függvény ismerete. Erre az

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{du}{d\varphi} u = \frac{1}{2} \frac{du^2}{d\varphi}$$

helyettesítéssel és az $u^2 = \xi$ jelöléssel az

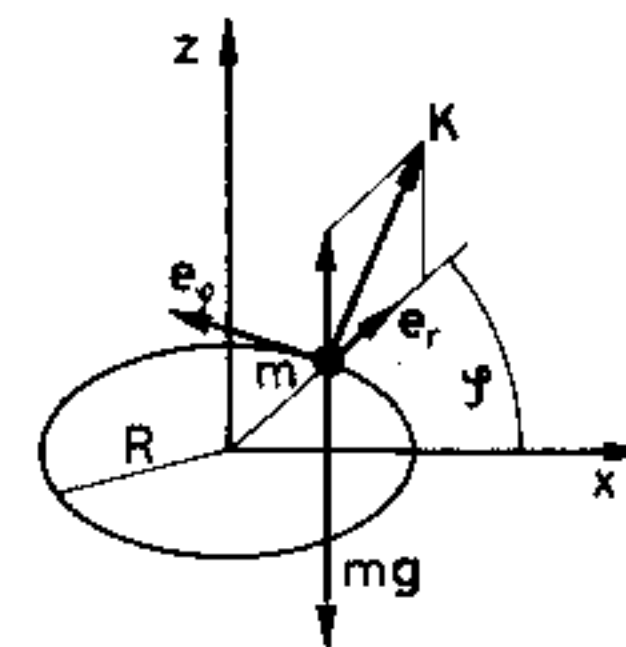
$$\frac{1}{2} R \frac{d\xi}{d\varphi} = -\mu \sqrt{g^2 + R^2 \xi^2}$$

egyenletet nyerjük. Ezt φ szerint 0-tól 2π -ig integrálva:

$$\operatorname{Arsh} \frac{R}{g} \xi(2\pi) - \operatorname{Arsh} \frac{R}{g} \xi(0) = -4\pi\mu.$$

Innen $\xi(2\pi) = 0$ miatt a keresett kezdősebesség

$$v(0) = R\dot{\varphi}(0) = R \sqrt{\xi(0)} = \sqrt{gR \operatorname{sh}(4\pi\mu)}.$$



7.18. a) A mozgásegyenlet $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - gm$, illetve, ha $\dot{x} \equiv v$, akkor $\dot{v} = -\frac{\alpha}{m}v - g$. Ennek a $v(0)=0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása

$$v(t) = -\frac{mg}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right). \quad (1)$$

Ezt az idő szerint még egyszer integrálva, és az $x(0)=h$ kezdeti feltételt figyelembe véve kapjuk a mozgás leírását:

$$x(t) = h - \frac{mg}{\alpha} \left[t - \frac{m}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) \right]. \quad (2)$$

b) $t \gg \frac{m}{\alpha}$ esetén az exponenciális tagot el lehet hanyagolni az 1

mellett, így a sebességre $v(t) = -\frac{mg}{\alpha}$ és a helyre pedig

$x(t) = h - \frac{mg}{\alpha}t$ adódik. Ebben az időtartományban a test

tehát egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A $t < \frac{m}{\alpha}$

időtartomány közvetlenül az indulás utánra vonatkozik.

Ekkor (1)-ben az exponenciális függvényt első, (2)-ben pedig másodrendig sorba fejtvé $v(t) = -gt$, illetve

$x(t) = h - \frac{g}{2}t^2$. Tehát közvetlenül az indulás után a test

úgy mozog, mintha szabadon esne.

c) A mozgásegyenletet \dot{x} -vel szorozva $m\dot{x}\ddot{x} + mg\dot{x} = -\alpha\dot{x}^2$.

Ennek bal oldala $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx \right)$ alakba írható, tehát

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = -\alpha\dot{x}^2 = -\frac{m^2g^2}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)^2.$$

7.19. A test mozgásegyenlete $m \frac{dv}{dt} = -\alpha v$. Ennek a $v(0)=v_0$ kezdeti

feltételt kielégítő megoldása $v(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$, tehát a sebesség exponenciálisan csökken. A nullát $t \rightarrow \infty$ esetén veszi fel. Az eközben megtett út azonban véges:

$$s = \int_0^{\infty} v(t) dt = v_0 \frac{m}{\alpha}.$$

7.20. Az emelkedés ideje:

$$t = \frac{m}{\alpha} \ln \frac{g + \frac{\alpha v_0}{m}}{g};$$

a magasság

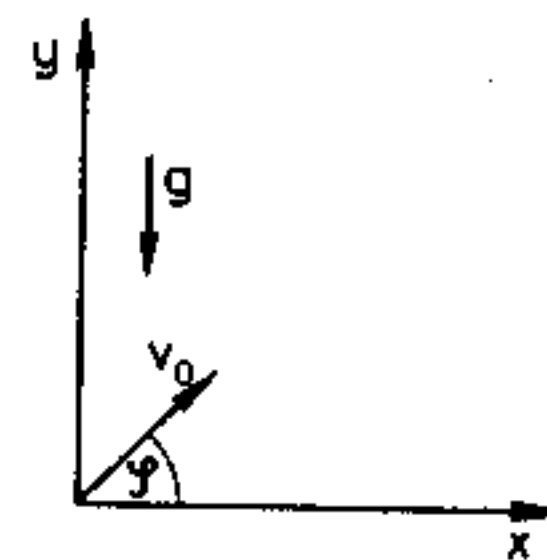
$$h = \frac{mv_0}{\alpha} - \frac{gm^2}{\alpha^2} \ln \frac{g + \frac{\alpha v_0}{m}}{g}.$$

7.21. A test mozgásegyenletei:

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x}, \quad m\ddot{y} = -mg - \alpha\dot{y},$$

illetve a sebességekkel:

$$\dot{v}_x = -\frac{\alpha}{m}v_x, \quad \dot{v}_y = -g - \frac{\alpha}{m}v_y. \quad (1)$$



$\frac{\alpha}{m} = 0$ esetén (1)-ből a légüres térbeli mozgásra azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y_0(t) &= v_0 t \sin \varphi - \frac{g}{2} t^2 \\ x_0(t) &= v_0 t \cos \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

ha figyelembe vesszük az $x(0)=y(0)=0$, illetve a $v_{x_0}(0) = v_0 \cos \varphi$, $v_{y_0}(0) = v_0 \sin \varphi$ kezdeti feltételeket. A (2) egyenletekből az időt kiküszöbölve nyerjük a pálya egyenletét:

$$y_0(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (3)$$

A közegellenállást első közelítésben úgy vesszük figyelembe, hogy a v sebességet az $\alpha = 0$ esetén talált v_0 körül α szerint sorba fejtjük, és csak a lineáris tagokat tartjuk meg:

$$v_x = v_{x_0}(t) + \frac{\alpha}{m} u_x, \quad v_y = v_{y_0}(t) + \frac{\alpha}{m} u_y. \quad (4)$$

Az (1) egyenletek jobb oldalán – mivel ott már szerepel a kicsiny α tényező – elegendő megtartani a v_{x_0} és a v_{y_0} értékeket, azaz u_x -re és u_y -ra

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= -v_x^{(0)}(t) = -v_0 \cos \varphi \\ \dot{u}_y &= -v_y^{(0)}(t) = -(v_0 \sin \varphi - gt). \end{aligned} \quad (5)$$

Mínt hogy $v^{(0)}(t)$ már kielégíti a kezdeti feltételeket, az (5) egyenletrendszer kezdeti feltételei $u_x(0)=u_y(0)=0$. Így (5) megoldása:

$$\begin{aligned} u_x(t) &= -v_0 t \cos \varphi \\ u_y(t) &= -\left(v_0 t \sin \varphi - \frac{g}{2} t^2\right). \end{aligned}$$

Ezt (4)-be helyettesítve megkapjuk a sebességeket α -ban első rendig:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \left(1 - \frac{\alpha}{m} t\right) \cos \varphi, \quad v_y = \\ &= v_0 \left(1 - \frac{\alpha}{m} t\right) \sin \varphi - gt \left(1 - \frac{\alpha}{2m} t\right). \end{aligned} \quad (6)$$

(6)-ot az $x(0)=y(0)=0$ kezdeti feltétellel még egyszer integrálva:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos \varphi \left(t - \frac{\alpha}{2m} t^2\right), \\ y(t) &= v_0 \sin \varphi \left(t - \frac{\alpha}{2m} t^2\right) - \frac{g}{2} \left(t^2 - \frac{\alpha}{3m} t^3\right). \end{aligned} \quad (7)$$

A módosult pálya egyenletét (7)-ből megkapjuk, ha a t időt α/m rendben kiküszöböljük:

$$y(x) = y_0(x) - \frac{\alpha}{2m} \frac{x^2}{v_0 \cos \varphi} \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{5}{3} \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \varphi}\right).$$

A földet érésig eltelt időt (7)-ből az $y(\tilde{t})=0$ egyenlet gyöke adja. Természetesen \tilde{t} -t is csak α -ban elsőrendig kell meghatározunk:

$$\tilde{t} = t_0 \left(1 - \frac{\alpha}{6m} t_0\right), \quad \text{ahol} \quad t_0 = \frac{2v_0}{g} \sin \varphi.$$

Ezt a \tilde{t} értéket (7) első egyenletébe helyettesítve, megkapjuk a földet érés helyét: $x(\tilde{t}) = x_0 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{m} t_0\right)$, ahol $x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi$ a légüres térben kapott hajítási távolság. A lineáris közelítés akkor alkalmazható, ha a dimenziótlan $\frac{\alpha}{m} t_0$ szám 1-nél sokkal kisebb.

7.22. a) A test felfelé történő mozgásának egyenlete:

$$\dot{v} = -g - kv^2;$$

ennek megoldása, ha $t=0$ -ban $v=v_0$:

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{tg} \left[-t \sqrt{kg} + \operatorname{arctg} v_0 \sqrt{\frac{k}{g}} \right].$$

Tovább integrálva és figyelembe véve, hogy $t=0$ -ban $z=0$:

$$z = \frac{1}{k} \ln \frac{\cos \left[-t \sqrt{kg} + \operatorname{arctg} v_0 \sqrt{\frac{k}{g}} \right]}{\cos \left[\operatorname{arctg} v_0 \sqrt{\frac{k}{g}} \right]}.$$

Ez a test helyzetének időfüggése felfelé haladás esetén. A legnagyobb magasság elérésekor $v=0$, ennek időpontja

$$t_0 = \sqrt{\frac{1}{kg}} \operatorname{arctg} v_0 \sqrt{\frac{k}{g}};$$

ebben az időpillanatban $z_{\max} = z(t_0) = \frac{1}{k} \ln \sqrt{1 + \frac{k}{g} v_0^2}$ magasan van a test.

b) Az esés mozgásegyenlete: $\dot{v} = -g + kv^2$; e differenciálegyenlet megoldása a $v(t=0)=0$ kezdő feltétel esetén:

$$v = -\sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{th}(t \sqrt{gk}).$$

Tovább integrálva: $z(t=0)=h$ mellett:

$$z = h - \frac{1}{k} \ln \operatorname{ch}(t \sqrt{gk}).$$

Ez egyben a test helyzetének időfüggése lefelé haladáskor ($h=z_{\max}$ helyettesítéssel).

A leesés időpontjában $z=0$, az előbbi egyenlet szerint ez akkor következik be, amikor: $t_1 = \sqrt{\frac{1}{gk}} \operatorname{arch} e^{kh}$, a becsapódás sebessége pedig:

$$v_1 = -\sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{th}(\operatorname{arch} e^{kh}).$$

c) A visszaérkezés sebességét az előző összefüggésből kapjuk, $h=z_{\max}$ helyettesítéssel:

$$v_1 = -v_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{g} v_0^2}}.$$

7.23. A mozgásegyenlet

$$m\dot{\mathbf{v}} = \alpha \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z.$$

Komponensekben írva: $m\dot{v}_x = \alpha v_y$, $m\dot{v}_y = -\alpha v_x$, $m\dot{v}_z = 0$. Az utolsó összefüggés szerint $v_z \equiv v_{z0} = 0$. Az elsőt újra deriválva

$$m\ddot{v}_x = \alpha \dot{v}_y = -\frac{\alpha^2}{m} v_x, \quad \text{azaz} \quad \ddot{v}_x + \frac{\alpha^2}{m^2} v_x = 0.$$

Ez a harmonikus rezgőmozgás ismert egyenlete; megoldása a $v_x(0) = v_{x0}$ kezdeti feltétellel:

$$v_x(t) = v_{x0} \cos \frac{\alpha}{m} t + A \sin \frac{\alpha}{m} t.$$

Az A integrációs állandó értékét a $v_{y0} = v_y(0) = \frac{m}{\alpha} \dot{v}_x|_{t=0} =$

$= A$ összefüggésből határozhatjuk meg. $v_x(t)$ és $v_y(t)$ ismeretében az $x(0)=y(0)=0$ kezdeti feltétellel egyszerű integrálással megoldható az $\dot{x}=v_x(t)$, $\dot{y}=v_y(t)$ egyenletrendszer, ez adja a mozgás leírását. A pálya az xy síkban fekvő kör. (Így mozog egy z irányú mágneses térbe helyezett töltött részecske.)

7.24. Mutassuk meg, hogy az első erő származtatható a

$$V(r) = -\frac{F_0}{2} r^2, \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$$

negatív gradienseként! A másik kérdés eldöntéséhez válaszunk olyan koordináta-rendszert, melyben \mathbf{A} -nak csak z irányú komponense van, és mutassuk meg, hogy az x, y síkban fekvő R sugarú körön körbejárva az \mathbf{F} erő munkája nem 0.

7.25. $k=0$ esetén a részecske szabad mozgást végez, energiája és impulzusa megmarad. Ha $k \neq 0$, akkor is érvényes az energiamegmaradás:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E. \quad (1)$$

Itt E a kezdeti feltételek által meghatározott, megmaradó energia: $E = \frac{1}{2}ka^2$.

Ha $k > 0$, akkor (1)-ből

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} dt.$$

Ennek az $x(0) = a$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása: $x(t) = a \cos t \sqrt{\frac{k}{m}}$. Ha $k = -|k| < 0$, akkor (1)-ből

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = dt \sqrt{\frac{|k|}{m}}.$$

Ennek a fenti kezdeti feltételt kielégítő megoldása: $x(t) = a \operatorname{ch} t \sqrt{\frac{|k|}{m}}$. $k > 0$ esetén a mozgás az $|x| \leq a$, $k < 0$ esetén az $|x| \geq a$ tartományban zajlik le. A részecske impulzusa, $p = m\dot{x}$ egyik esetben sem állandó.

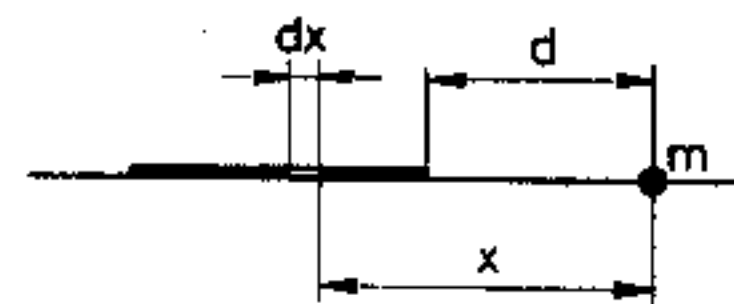
7.26. A testek mg súlya a Föld és a test közötti gravitációs kölcsönhatás eredménye: $mg = G \frac{mM_F}{R_F^2}$ (M_F a Föld tömege, R_F a sugara, G pedig a gravitációs állandó).

Ebből

$$\Delta g = \left(\frac{1}{(R_F + \Delta R)^2} - \frac{1}{R_F^2} \right) GM_F \approx -\frac{2GM_F}{R_F^3} \Delta R = -2g \frac{\Delta R}{R}.$$

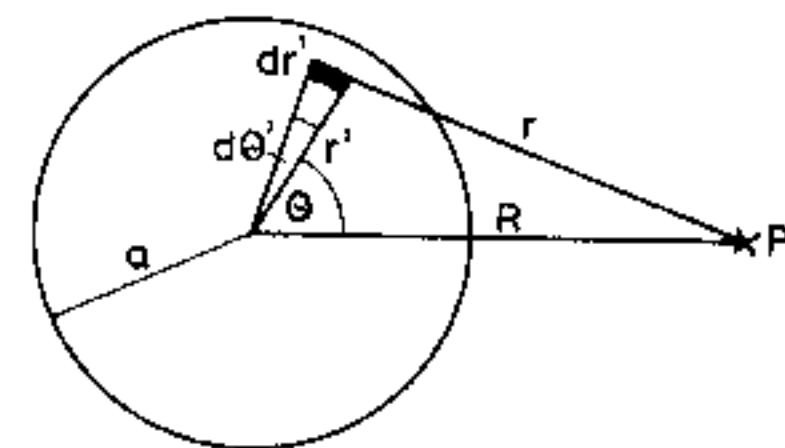
Ha $\frac{\Delta R}{R} = 1\% = 0,01$, akkor g 2%-kal csökken.

7.27.
$$F = \int_d^{l+d} -G \frac{m\varrho dx}{x^2} = \frac{Gm\varrho l}{d(l+d)}$$



7.28. A gömb középpontjától R távolságra levő P pontban a potenciál

$$\Phi(P) = -G \int_V \frac{\varrho(r')}{r} dV'$$



A gömbszimmetrikus sűrűség miatt az azimuttszögre integrálhatunk:

$$\Phi(P) = -G2\pi \int_0^a dr' r'^2 \varrho(r') \int_0^\pi \frac{\sin \Theta}{r} d\Theta. \quad (1)$$

A cosinustétel szerint $r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \Theta$.

Rögzített r' mellett differenciálva, ebből $2r dr = 2r'R \sin \Theta d\Theta$

adódik. $\frac{\sin \Theta}{r} d\Theta$ -t (1)-be helyettesítve,

$$\Phi(P) = -G \frac{2\pi}{R} \int_0^a dr' r' \varrho(r') \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr. \quad (2)$$

Itt r_{\min} és r_{\max} r rögzített r' esetén felvett – szélsőértékei. Ha a P pont a gömbön kívül van, $r_{\max} = R + r'$, $r_{\min} = R - r'$. Így ebben az esetben

$$\Phi_{\text{külső}}(P) = -G \frac{4\pi}{R} \int_0^a dr' r'^2 \varrho(r') = -\frac{GM}{R}. \quad (3)$$

(3) mutatja, hogy gömbszimmetrikus tömegeloszlás esetén a külső gravitációs potenciál csak az össztömegtől függ.

Ha a P pont a gömbön belül van, akkor $r_{\min} = r' - R$, illetve $r_{\min} = R - r'$ aszerint, hogy az integrálási pontra (r') $r' \geq R$ vagy $r' \leq R$. $r_{\max} = R + r'$ mindkét esetben. Így

$$\Phi_{\text{belső}}(P) = -G4\pi \left\{ \int_R^a dr' r' \rho(r') + \frac{1}{R} \int_0^R dr' r'^2 \rho(r') \right\}. \quad (4)$$

(4)-ből a belső pontokban kiszámított – radiális – erő:

$$F_r = -\frac{G4\pi}{R^2} \int_0^R dr' r'^2 \rho(r') = -\frac{GM_{\text{belső}}}{R^2}.$$

Ez akkor lesz R -től független, ha $\frac{1}{R^2} \int_0^R dr' r'^2 \rho(r')$ független

R -től.

7.29. Gömbszimmetrikus tömegeloszlás esetén a nehézségi gyorsulás az origótól r távolságra:

$$g(r) = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

(l. a 7.28. feladatot!). Mindkét oldalt r szerint differenciálva és bevezetve a

$$\bar{\rho}(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' (4\pi r^3/3)^{-1}$$

átlagos sűrűségfüggvényt:

$$\frac{dg}{dr} = 4\pi G \left[\rho(r) - \frac{2}{3} \bar{\rho}(r) \right].$$

A Föld kérgében

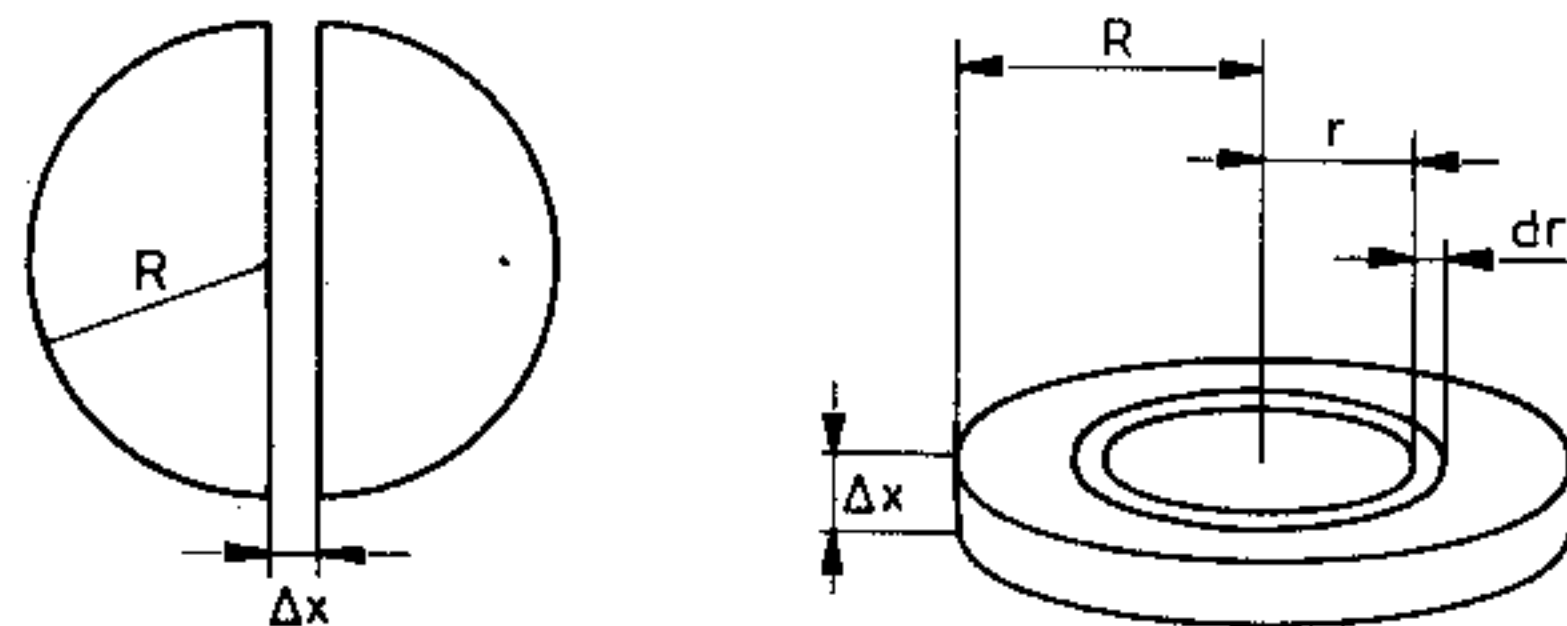
$$\rho(r) = 3 \text{ g/cm}^3 < \frac{2}{3} \bar{\rho}(r) = 3,7 \text{ g/cm}^3,$$

így a kéregben a nehézségi gyorsulás a Föld belseje felé haladva növekszik. Egy h mélységű aknában legalacsonyabb rendben számolva a nehézségi gyorsulás

$$\Delta g = \frac{8}{3} \pi G h \left(\bar{\rho} - \frac{3}{2} \rho \right) \text{-val}$$

nagyobb a felszíni értéknél. ($h=1000$ m esetén $\Delta g \cong \cong 6 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$.)

7.30. A két fél-Föld egymástól Δx távolságra történő elmozdításához szükséges W munka egyrészt $W = F \Delta x$, ahol F kérdéses erő. W azonban megkapható a következő módon: kiszámoljuk, hogy mennyi munkát kell végezni ahhoz, hogy a Δx vastagságú korongban található anyagot kilapátoljuk a Föld felszínére. (A Föld felülete ekvipotenciális felület, ezért a kilapátolt anyag elterítése már nem jár munkavégzéssel.)



Tekintsünk a korongban egy r sugarú dr vastagságú gyűrűt. Ennek tömege $\Delta m = 2\pi r dr \Delta x \rho$ (ρ a Föld sűrűsége). Ezen gyűrű anyagának kilapátolásához $\Delta W = \Delta m (\Phi(R) - \Phi(r))$ munkát kell végezni. Itt $\Phi(r)$ a 7.28. feladatban meghatározott gravitációs potenciál: $\Phi(r) = -G2\pi\rho \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right)$. Így

$$\begin{aligned} W &= \int_0^R \Delta W(r) dr = -G \frac{4\pi^2}{3} \rho^2 \Delta x \int_0^R dr (r^3 - rR^2) = \\ &= G \frac{\pi^2}{3} \rho^2 R^4 \Delta x. \end{aligned}$$

Innen

$$F = G \frac{\pi^2}{3} \rho^2 R^4 = \frac{3}{16} G \frac{M_F^2}{R^2} = \frac{3}{16} g M_F$$

ahol g a Föld felszínén mért nehézségi gyorsulás és M_F a Föld tömege.

7.31. a) $v = \sqrt{\frac{2GMh}{R(R+h)}}$ (M a Hold tömege,
 R a Hold sugara.)

b) $h \approx 28$ km.

c) $t = \sqrt{\frac{R+h}{2GM}} \left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2} \arccos \frac{R-h}{R+h} \right)$.

7.32. A tömegközéppont tétel szerint a tömegközéppont vízszintes irányban nem mozdulhat el, ezért a becsapódáskor a testeknek nincs vízszintes sebessége. A jobb oldali tömeg sebessége az energiamegmaradás alapján $\sqrt{2gh}$. Különböző tömegek esetén a sebességek a becsapódás pillanatában ugyanekkorák.

7.33. Az elmozdulás nagysága: $\frac{m_2 a}{m_1 + m_2}$.

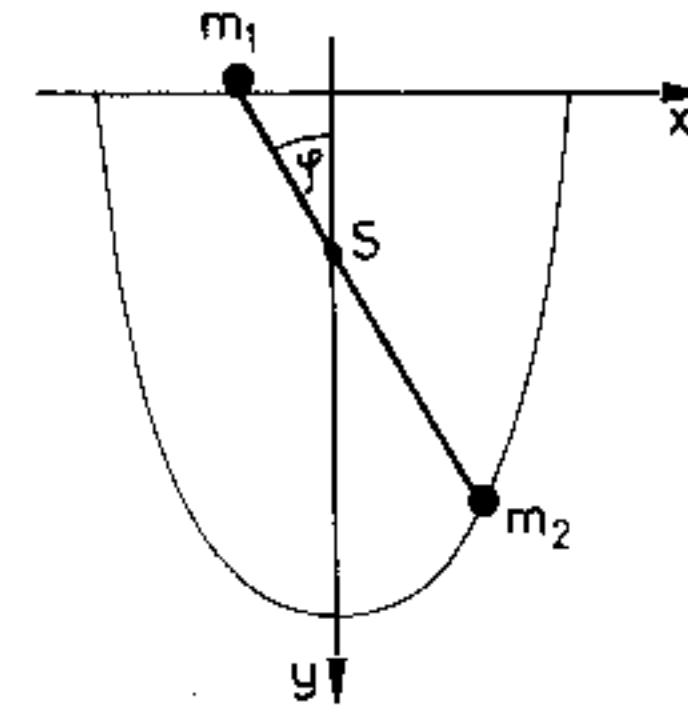
7.34. Az elmozdulás nagysága: $h(m_1 \operatorname{ctg} \alpha + m_2 \operatorname{tg} \alpha) / (m_1 + m_2 + m)$.

7.35. Vegyük föl a koordináta-rendszert úgy, hogy a függőleges (y) tengelye menjen át az S tömegközépponton, vízszintes tengelye (x) pedig m_1 pályájával essen egybe. A rendszerre vízszintes irányú külső erő nem hat, ezért a tömegközéppontja x irányban nem mozdul el. Így m_2 koordinátái:

$$x = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi,$$

ahol φ a rúdnak a függőlegessel bezárt szöge. Ebből a pálya egyenlete:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} l \right)^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1,$$



tehát a pálya: $\frac{m_1}{m_1 + m_2} l$, ill. l féltengelyű ellipszis.

7.36.

$$a = \frac{GM}{2} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(R+l)^2} \right), \quad F = \frac{GmM}{2} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+l)^2} \right),$$

ahol M a Föld tömege és G a gravitációs állandó. A tömegközéppontban elhelyezett $2m$ tömegű test gyorsulása:

$$a_0 = \frac{GM}{(R+l/2)^2} \neq a,$$

tehát a rendszer nem úgy mozog, mintha az egész tömege a tömegközéppontban lenne egyesítve!

7.37. A rugalmas centrális ütközésre az energia- és impulzusmegmaradás:

$$mu = MV + mv$$

$$\frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} mv^2.$$

Innen

$$V = \frac{2u}{1 + \frac{M}{m}}, \quad v = u \frac{1 - M/m}{1 + M/m}$$

$m \ll M$ esetén $V \approx 0$ és $v \approx -u$, tehát az ütköző test változatlan nagyságú sebességgel visszapattan.

$M \ll m$ esetén $V \approx 2u$, $v \approx u$. A nagytömegű ütköző test ugyanolyan sebességgel tovább megy, a kistömegű test kétszeres sebességgel „előre pattan”.

$m = M$ esetén $V = u$, $v = 0$ („sebességcsere”).

7.38. Az energia- és impulzusmegmaradás:

$$mu = MV_2, \quad 0 = mv_1 - MV_1,$$

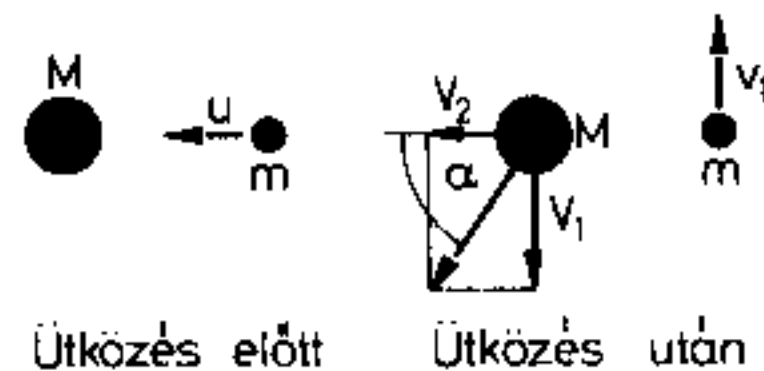
$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}M(V_1^2 + V_2^2) + \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Innen

$$V_2 = \frac{m}{M}u, \quad V_1 = \frac{m}{M}u \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}, \quad v_1 = u \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}.$$

Az M tömeg sebességének iránya:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}.$$



7.39. Legyen a becsapódó részecske tömege m_1 , sebessége az ütközés előtt u_1 , utána v_1 , a másik részecske tömege m_2 , ütközés utáni sebessége v_2 . Az energia- és az impulzusmegmaradás tételéből a sebességekre háromismeretlenes, homogén másodfokú egyenletrendszert kapunk, ezért csak a sebességarányok határozhatók meg. A nemtriviális megoldás létezésének feltételeként adódik viszont egy összefüggés a szögek és a tömegarány között. Ez a következő:

$$\frac{m_1}{m_2} = \sin^2 \vartheta_2 \left[(\operatorname{ctg} \vartheta_1 + \operatorname{ctg} \vartheta_2)^2 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta_1} \right].$$

A sebességarányokra:

$$\frac{u_1}{v_1} = \sin \vartheta_1 (\operatorname{ctg} \vartheta_1 + \operatorname{ctg} \vartheta_2)$$

$$\frac{u_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} \sin \vartheta_2 (\operatorname{ctg} \vartheta_1 + \operatorname{ctg} \vartheta_2).$$

7.40. Az előző feladat eredményéből következik, hogy

$$\operatorname{ctg} \vartheta_1 = \left(\frac{m_1}{m_2} - \cos 2\vartheta_2 \right) \frac{1}{\sin 2\vartheta_2}.$$

Ennek szélsőértéke a

$$\cos 2\vartheta_2 = \frac{m_2}{m_1}$$

helyen van, amiből az következik, hogy $\sin \vartheta_{1 \max} = \frac{m_2}{m_1}$.

7.41. Jelöljük az eredetileg mozgó test ütközés utáni sebességét v_1 -gyel, a másik kettőt pedig az elhelyezkedés sorrendjének megfelelően v_2 -vel, illetve v_3 -mal. Mivel az ütközés rugalmas és a testekre legfeljebb az egyenesre merőleges kényszererők hatnak, a testek összes impulzusa és energiája az ütközés során nem változik:

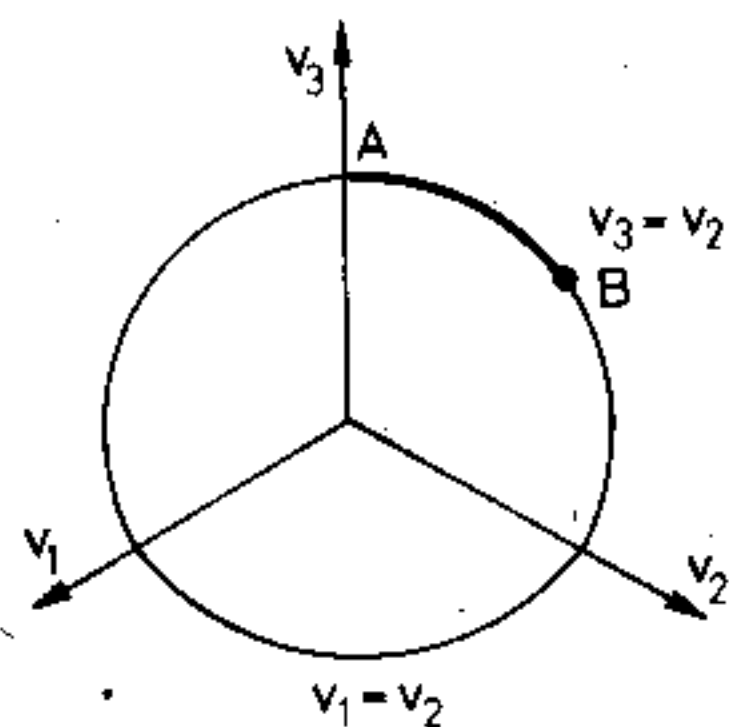
$$u = v_1 + v_2 + v_3, \quad (1)$$

$$u^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \quad (2)$$

A testek egymáson nem hatolnak át:

$$v_1 \leq v_2 \leq v_3. \quad (3)$$

(1) egy síkot, (2) egy gömböt határoz meg. A közös részüket képviselő körnek a (3) feltételt kielégítő pontjai az ábra szerint



az \widehat{AB} köríven helyezkednek el. A B pont koordinátái (1) és (2) alapján a $v_2 = v_3$ helyettesítéssel adódnak:

$$B = \left(-\frac{u}{3}, \frac{2}{3}u, \frac{2}{3}u \right).$$

Így a sebességek értékei a következők lehetnek:

$$-\frac{u}{3} \leq v_1 \leq 0; \quad 0 \leq v_2 \leq \frac{2}{3}u; \quad \frac{2}{3}u \leq v_3 \leq u.$$

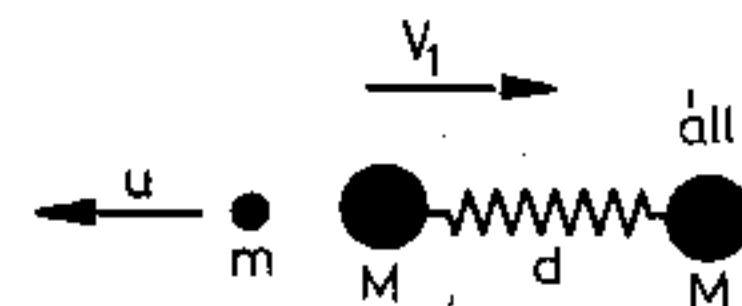
Egy konkrét ütközés esetén a sebességek értékeit az dönti el, hogy milyen a kölcsönhatás az egyes testek között. Ha pl. az 1 és 2 test nagyon puhán, a 2 és 3 nagyon keményen ütközik, akkor 2 és 3 egy testként viselkedik és közelítőleg a

$\left(-\frac{u}{3}, \frac{2}{3}u, \frac{2}{3}u \right)$ megoldás valósul meg. Fordított esetben az 1

sokkal gyorsabban adja át impulzusát, mint ahogy a harmadik föl tudná venni és a sebességek a $(0, 0, u)$ értéket veszik föl.

7.42. Feltételezze, hogy az ütközés ideje sokkal kisebb, mint a jobb oldali rendszer rezgésideje (ez reális feltevés), a rugó jelenlétéről az ütközés alatt megfeledkezhetünk. Az ütközés után az ábrán látható sebességek alakulnak ki. Az energia- és az impulzusmegmaradásból:

$$u = \frac{M-m}{M+m}v \quad \text{és} \quad V_1 = \frac{2m}{M+m}v.$$



Közvetlenül az ütközés után

A továbbiakban az m tömeg szabadon mozog, a M tömegek viszont a rugón keresztül kölcsönhatásban maradnak és bonyolult, rezegve haladó mozgást végeznek. Ezt a mozgást célszerű a

$$\frac{V_1}{2} = \frac{m}{M+m}v$$

sebességgel mozgó tömegközépponti rendszerükből leírni. Ebben a rendszerben a kezdősebességek

$$V_1^{\text{TKR}}(t=0) = \frac{m}{M+m}v, \quad V_2^{\text{TKR}}(t=0) = -\frac{m}{M+m}v.$$

A rezgés frekvenciája: $\omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}$, a rugó hosszának időbeli változása tehát

$$r(t) = d - \frac{2mv}{M+m} \sqrt{\frac{M}{2k}} \sin t \sqrt{\frac{2k}{M}}.$$

A rugó végén levő testek elmozdulásai az eredeti koordináta-rendszerben:

$$x_{1,2}(t) = \frac{mv}{m+M}t \mp \left(\frac{d}{2} - \frac{mv}{M+m} \sqrt{\frac{M}{2k}} \sin t \sqrt{\frac{2k}{M}} \right).$$

7.43. A falra gyakorolt erő a víz lefékezéséből ered. Δt idő alatt $\Delta m = \rho v S \Delta t$ tömegű víz éri el a falat. A falra merőleges impulzus változása $\Delta I = \Delta m v = \rho v^2 S \Delta t$, így a falra gyakorolt erő: $F = \rho v^2 S$. A számértékekkel: $F = 86,4$ N.

7.44. A test Δt idő alatt $v \Delta t$ utat tesz meg és ezalatt körülbelül $\Delta m = \rho A v \Delta t$ tömegű gázt hoz mozgásba. (A a test keresztmet-

szete). A kavargó gáz sebessége hozzávetőlegesen v , a mozgási energiája tehát $\frac{1}{2} \rho A v^3 \Delta t$. Ezt az energiát a testet mozgó F erő $F \cdot v \cdot \Delta t$ munkája fedezi, ahonnan $F = \frac{1}{2} \rho A v^2$. Ez a képlet - az alkalmazott közelítések bizonytalansága miatt - még egy 1 nagyságrendű, a test alakjától függő szorzótényezővel módosulhat.

7.45. Az esőcseppekre - az előző feladat szerint - kv^2 súrlódási erő hat. Az egyenletes mozgás feltétele: $mg - kv^2 = 0$, azaz $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$. Az esőcseppek tömege $m = \rho \frac{4\pi}{3} R^3$, a k közegellenállási tényező pedig $k \sim R^2$ (lásd az előző feladatot). Így $v \sim \sqrt{R}$.

7.46. A rakéta és az eltávozó gázok összes impulzusváltozása nulla. A rakéta impulzusváltozása:

$$\frac{dI_r}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = m\dot{v} + \dot{m}v$$

(m a rakéta pillanatnyi tömege, $v(t)$ pedig a pillanatnyi sebessége). Ha a gázok a rakétát - V sebességgel hagyják el, akkor az álló koordináta-rendszerben a gázok sebessége $v - V$. Így a kilövellő gázok impulzusváltozása: $\frac{dI_G}{dt} = -(v - V)\dot{m}$ ($\dot{m} < 0$, mert a tömeg csökken!). Így a mozgásegyenlet:

$$m\dot{v} + V\dot{m} = 0.$$

Ennek a $v(0) = v_0$, $m(0) = m_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$v = v_0 + V \ln \frac{m_0}{m}.$$

A rakétára $m_0 = M + M_0$ és az üzemanyag teljes elégetésekor $m = M_0$, így a maximálisan elérhető sebesség

$$v = v_0 + V \ln \left(1 + \frac{M}{M_0} \right).$$

7.47. Az első ütközésig eltelt idő $\sqrt{2h/g}$, a becsapódási sebesség $\sqrt{2gh}$. A visszapattanási sebesség $\varepsilon \sqrt{2gh}$, ezért a következő ütközésig eltelt idő $2\varepsilon \sqrt{2h/g}$. A visszapattanási sebesség ezután már csak $\varepsilon^2 \sqrt{2gh}$, s ezért a következő ütközésig eltelt idő is kisebb: az előző ε -szorososa. Ha tehát ezeket az időtartamokat összeadjuk, egy végtelen mértani sort kapunk, melynek összege véges:

$$T = \sqrt{2h/g} + 2\sqrt{2h/g}\varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i = \sqrt{2h/g} \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Tökéletesen rugalmatlan ütközés esetén természetesen $\sqrt{2h/g}$ az eredmény, ami az $\varepsilon = 0$ értéknek felel meg.

7.48. A Föld mozgási energiáját növelte. A Föld mozgási energiájának változása ugyanis csak abban a rendszerben hanyagolható el, amelyben a Föld áll. A kezdeti pillanatban a Földhöz képest álló invarianciarendszerben legyen az autó sebessége az induláskor v_1 , végül pedig v_2 . Vizsgáljuk a mozgást egy olyan invarianciarendszertől, amely a fentihez képest u sebességgel mozog.

A Föld-autó-rendszer összimpulzusa megmarad, hiszen csak belső erők hatnak:

$$-Mu + m(v_1 - u) = -Mu' + m(v_2 - u), \quad (1)$$

ahol u' a Föld sebessége a későbbi időpillanatban. Innen a Föld sebességének változása:

$$\Delta u \equiv u' - u = \frac{m}{M}(v_2 - v_1) \equiv \frac{m}{M} \Delta v.$$

Az autó energiájának megváltozása:

$$\Delta E_a = \frac{1}{2} m(v_2 - u)^2 - \frac{1}{2} m(v_1 - u)^2 = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) - mu \Delta v.$$

Amint látható, ez függ u -tól, a vonatkoztatási rendszernek a Földhöz viszonyított sebességétől.

A Föld mozgási energiájának változása:

$$\begin{aligned}\Delta E_F &= \frac{1}{2} M u'^2 - \frac{1}{2} M u^2 = \frac{1}{2} M (u + \Delta u)^2 - \frac{1}{2} M u^2 = \\ &= u \cdot M \Delta u + \frac{1}{2} M (\Delta u)^2.\end{aligned}$$

Mint az első tagból látható, ez is függ u -tól. A rendszer teljes kinetikus energiájának megváltozása azonban az $M \Delta u = m \Delta v$ összefüggés miatt már független a vonatkoztatási rendszer sebességétől:

$$\Delta E_a + \Delta E_F = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M (\Delta u)^2.$$

Az utolsó tag természetesen elhanyagolható, hiszen

$$\frac{1}{2} M (\Delta u)^2 = \frac{1}{2} m (\Delta v)^2 \frac{m}{M} \ll \frac{1}{2} m v^2.$$

A fenti megfontolásban a Földet olyan testnek tekintettük, amely csak haladó mozgást végezhet. A valóságban természetesen foroghat is, de belátható, hogy ez a tény csak annyiban módosítja az eredményt, hogy a „hiányzó” 2 cm^3 benzín a Föld mozgási és forgási energiáját növeli.

7.49. A munka akkor minimális, ha Kelet felé lőjük ki az ágyúgolyót; ekkor a kilövés sebessége: $v = v_k - v_F$; itt $v_k = \sqrt{g R_F}$ a körmozgás sebessége, $v_F = R_F \omega_F$ pedig a Föld forgásából adódó kerületi sebesség.

8. Egydimenziós mozgás

8.1. a) A részecske mozgására fennáll az energiamegmaradás

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + V(x) \quad (\text{itt } v \text{ a részecske sebessége az } x$$

pontban). Innen $\frac{1}{2} m v^2 = E - V(x)$. $\frac{1}{2} m v^2$ nem lehet negatív; ezért a mozgás olyan tartományokban zajlik le, ahol $E - V(x) \geq 0$. (Az $E = V(x_0)$ egyenlet megoldásai a mozgás határait adó „megállási pontok”.) Az $x > a$ tartományban $V(x) \equiv V_0$, ezért annak feltétele, hogy ide eljuthasson a részecske

$$E - V_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - V_0 \geq 0, \quad \text{azaz} \quad v_0^2 \geq \frac{2V_0}{m}.$$

b) Abban a tartományban, ahol a potenciál nem állandó, a részecskére külső erő hat, és ezért az impulzus nem marad meg. Ha $v_0^2 \geq \frac{2V_0}{m}$, akkor a potenciállépcsőn történő átha-

ladás után a részecske impulzusa $p = m v = m \sqrt{v_0^2 - \frac{2V_0}{m}}$,

és így impulzusának megváltozása $\Delta p = p - p_0 = m \left(\sqrt{v_0^2 - \frac{2V_0}{m}} - v_0 \right)$.

c) Az energiamegmaradásból $v = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))} = \frac{dx}{dt}$; innen pedig

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} + \text{konst.}$$

(Az integrálás természetesen csak a megállási pontok közötti tartományra vonatkozik.) Esetünkben addig, amíg $x < 0$, $V(x) \equiv 0$, és így ebben a tartományban $t = \frac{1}{v_0} (x - x_0)$,

azaz a részecske egyenletesen mozog. Az $a > x > 0$ tartományban $V = \frac{V_0}{a}x$, és az integrálás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$x = -\frac{V_0}{2am} \left(t - \frac{2a}{V_0} \sqrt{\frac{mE}{2}} \right)^2 + \frac{aE}{V_0}.$$

(Itt az időt attól a pillanattól mérjük, amikor a részecske az $x=0$ pontba ért.) Ebben a tartományban tehát a részecske $V_0/(2am)$ állandó gyorsulással mozog. Ha $E \geq V_0$, akkor a részecske így mozog egészen az $x=a$ pontig, az $x > a$ tartományban pedig az előbb talált $v = \sqrt{E - \frac{2V_0}{m}}$ állandó sebességgel mozog tovább. Ha $E < V_0$, akkor a lassuló mozgás csak az $E = \frac{V_0}{a}x_1$ pontig tart, és ebben a pontban a részecske sebessége 0 lesz. Minthogy ebben a pontban a részecskére $F = -\frac{dV}{dx} = -\frac{V_0}{a}$ nagyságú erő hat, ezután sebessége az ellentétes (negatív) irányban nő tovább, azaz a részecske visszafordul.

8.2. a) A részecske akkor van kötve, ha az $|x| > a/2$ tartományban mozgási energiája negatív, azaz ha $E < V_0$.

b) Ebben az esetben az $x_{1,2} = \pm \frac{a}{2}$ pontok lesznek a megállási pontok; e két pont között $V \equiv 0$, így a periódusidő:

$$T = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \quad \text{vagyis} \quad T = a \sqrt{\frac{2m}{E}}.$$

8.3. a) A megállási pontok $x_1=0$ és $x_2 = \frac{E}{F}$, a periódusidő a

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \text{ kifejezéséből pedig } T = \frac{2\sqrt{2mE}}{F}.$$

b) A megállási pontok: $x_1=0$ és $x_2 = \sqrt{\frac{E}{a}}$, $T = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2m}{a}}$.

8.4. a)

$$T = \frac{\pi \sqrt{2m}}{\alpha \sqrt{|E|}}.$$

b)

$$T = \frac{\pi \sqrt{2m}}{\alpha \sqrt{E + v_0}}.$$

8.5. $x(t) = \frac{x_0}{1 \pm t x_0 \sqrt{2A/m}}$. Itt $x_0 = x(0)$, és a nevezőben az előjel $\dot{x}(0)$ előjelével *ellentétesen* választandó. Ha $x_0 > 0$ és $\dot{x}(0) > 0$, akkor a részecske $t = \sqrt{2A/(m x_0^2)}$ idő alatt a „végtelenbe” távozik; ha $x_0 > 0$ és $\dot{x}(0) < 0$, akkor a részecske aszimptotikusan közelít az $x=0$ ponthoz.

8.6. A megállási ponthoz közel $U(x) \cong E - (x-a)F$, ahol $F = -U'(a)$ állandónak vehető. Az állandó erő hatására létrejövő mozgás (az $x(0)=a$ feltételt figyelembe véve): $x(t) = a + \frac{F}{2m}t^2$. Az összefüggés pontossága természetesen az a -tól való távolodással csökken. Ha $U''(a)=0$, akkor $U(x)$ sorfejtésében a következő tagot kell figyelembe vennünk:

$$U(x) \cong E + \frac{1}{2} U''(a)(x-a)^2.$$

Beírva ezt az energiamegmaradás törvényébe, az

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} U''(a)(x-a)^2 = 0$$

egyenletet kapjuk. Innen $\dot{x} = \pm \lambda(x-a)$, ahol bevezettük a $\lambda^2 = -\frac{U''(a)}{m}$ jelölést. Ennek az egyenletnek megoldása:

$x(t) = a + s e^{\pm \lambda t}$; $s = x(0) - a$. A kitevőben az előjelet a sebesség kezdeti iránya szabja meg.

8.7. $T \sim \ln(U_m - E)$.

8.8. A rezgésidőt a

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

összefüggésből kapjuk. Itt x_1 és x_2 az $E = V(x)$ egyenlet megfelelően választott két valós gyöke.

a) Ha $E > 0$ (ekkor $A \geq 0$ is lehet), akkor $\omega = \frac{2\pi\Omega}{4K(k)}$ alakba írható, ahol

$$\Omega = \sqrt{\frac{2|A|}{m}} \left(1 + \frac{4EB}{A^2}\right)^{1/4}, \quad k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\text{sgn } A}{\sqrt{1 + 4BE/A^2}}\right),$$

$$\text{és } K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \Theta)^{-1/2} d\Theta$$

az elsőfajú elliptikus integrál.

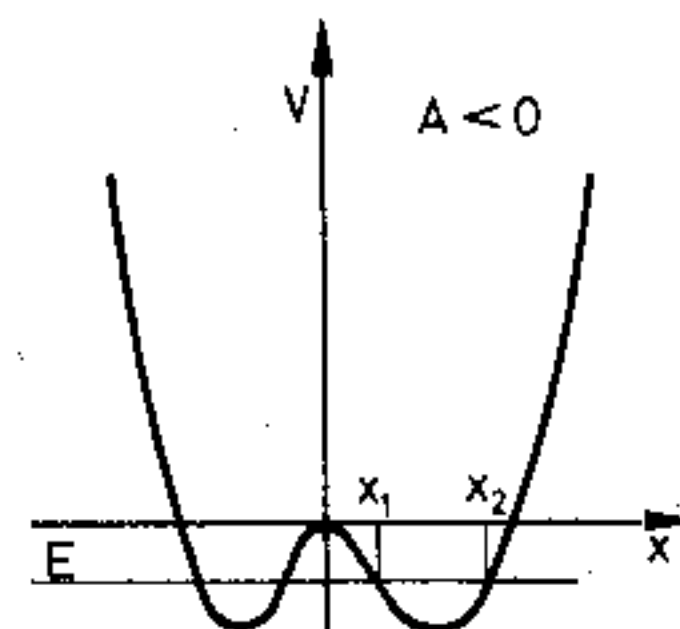
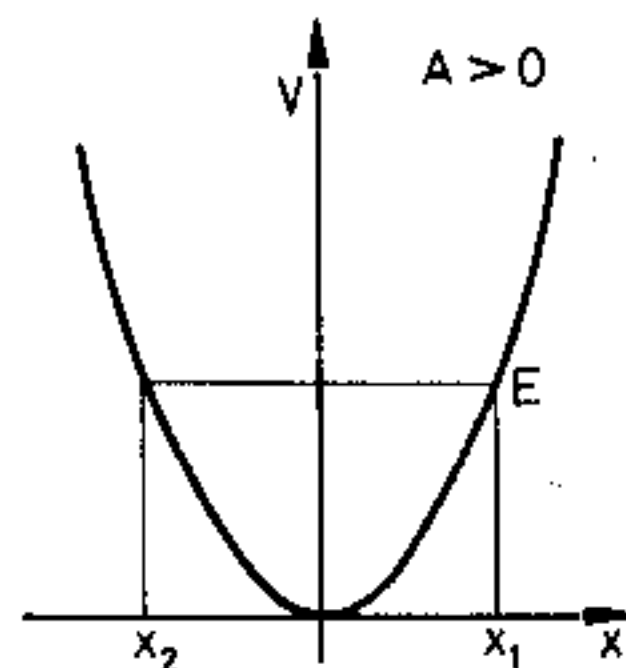
b) $A < 0$ esetén E lehet negatív is a $a - \frac{A^2}{4B} < E < 0$ tartományban. Ekkor $\omega = \frac{\pi\tilde{\Omega}}{K(\tilde{k})}$, ahol

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{\frac{2|A|}{m} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4BE}{A^2}\right)^{1/2} \right]} \quad \text{és}$$

$$\tilde{k}^2 = 2 \left[1 + \left(1 + \frac{4BE}{A^2}\right)^{-1/2} \right]^{-1}$$

Vizsgáljuk meg ω viselkedését néhány karakterisztikus energiaérték körül! (A továbbiakban a frekvenciát $\sqrt{\frac{2|A|}{m}}$ az energiát pedig $A^2/4B$ egységekben mérjük.)

1. $A > 0$ esetén $E \approx 0$ körül az oszcillátor harmonikus, frekvenciája 1. $E \gg 1$ esetén aszimptotikusan



$$\omega \approx \frac{\pi}{2K(1/\sqrt{2})} (1 + E)^{1/4} \approx 0,847E^{1/4}.$$

2. $A < 0$ esetén az $E \gg 1$ aszimptotika megegyezik a fentivel. $E \approx 0$ esetén $\omega \approx \pi \left(\ln \frac{64}{|E|} \right)^{-1}$, összhangban a 8.7. feladat eredményével. $E \sim -1$ esetén az oszcillátor a $\pm x = \sqrt{\frac{|A|}{2B}}$ pontok egyike körül $\sqrt{2}$ frekvenciájú harmonikus rezgést végez.

9. Mozgás centrális erőterben

9.1. A mesterséges hold akkor fog körpályán mozogni, ha a gravitációs vonzóerő éppen a centripetális erőt adja:

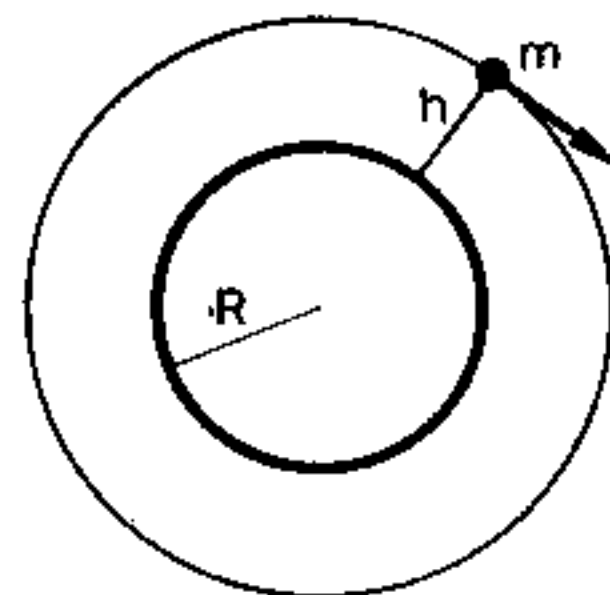
$$\frac{mv^2}{R+h} = G \frac{Mm}{(R+h)^2},$$

de $\frac{GM}{(R+h)^2}$ éppen a h magasságban mérhető nehézségi gyorsu-

lás (g'), így

$$v = \sqrt{g'(R+h)} = \sqrt{g \frac{R^2}{R+h}}$$

(g a Föld felszínén a nehézségi gyorsulás).



9.2. A Nap–Föld-rendszer zárt, a köztük ható gravitációs erő csak a két égitest kölcsönös helyzetétől függ és létezik potenciálja (konzervatív erőter), tehát a rendszer energiája megmarad. A rendszer összimpulzusa és impulzusmomentuma is megmarad, hiszen a rendszer zárt (külső erők nem hatnak). Ha a Napot rögzített külső erőforrásnak tekintjük (ezt jó közelítéssel megtehetjük, hiszen a Nap centruma gyakorlatilag egybeesik a Nap–Föld-rendszer tömegközéppontjával), akkor az energiamegmaradás továbbra is érvényes, hiszen a Földre ható gravitációs erőter konzervatív. A gravitációs erő most külső erőnek számít, és természetesen változtatja a Föld impulzusát (a Föld nem egyenes vonalú egyenletes mozgást végez). Ami a Föld impulzusmomentumára vonatkozik, az megmarad, ha a vonatkoztatási rendszer origóját a Nap középpontjában vesszük fel, hiszen ekkor a Földre ható erő centrális, nulla a forgatónyomatéka.

A Nap–Föld-rendszer tömegközéppontjához rögzített vonatkoztatási rendszerben a Nap energiája és impulzusmomentuma elhanyagolható a Földéhez képest (annak $\approx M_F/M_N$ -szerese), az impulzusa viszont ugyanakkora, mint a Földé, csak ellenkező irányú (természetesen szintén nem marad meg).

- 9.3. a) A belső erők konzervatívak, tehát a N–F–H rendszer energiája megmarad. Mivel külső erők nem hatnak, ezért a rendszer impulzusa és impulzusmomentuma is megmarad.
 b) A belső (F–H) és a külső (N–F, N–H) erők konzervatívak, tehát a F–H rendszer energiája megmarad. Mivel külső

erők hatnak (és összegük nem nulla), a rendszer impulzusa nem állandó. Ha a koordináta-rendszer középpontját a Nap centrumában vesszük fel, a F–H rendszer impulzusmomentuma megmarad, hiszen a külső erők centrálisak az origó, azaz a Nap felé mutatnak. (Ha az origót máshol vennénk fel, az erre vonatkozó impulzusmomentum nem lenne állandó!)

- c) Vegyük fel az origót a Nap centrumában. A külső erőknek (N–H, F–H) létezik potenciálja, de a F–H erő esetében ez időfüggő, hiszen függ a Föld $r_F(t)$ helyzetétől, ami most külső paraméter, nem dinamikai változó – tehát a rendszer nem konzervatív, a Hold energiája nem marad meg. (Egy ügyesen manőverező űrhajó egy bolygó vonzását kihasználva energiára tehet szert.)

Természetesen az impulzus és az impulzusmomentum sem marad meg, hiszen hatnak külső erők, és ezek nem centrálisak.

- 9.4. Centrális térről lévén szó, alkalmazhatjuk az impulzusnyomaték megmaradásának tételét:

$$v_0 b = v_1 r_1,$$

hiszen a legközelebbi pontban v_1 merőleges r_1 -re. Az energiamegmaradásból kapjuk:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - G \frac{mM}{r_1}.$$

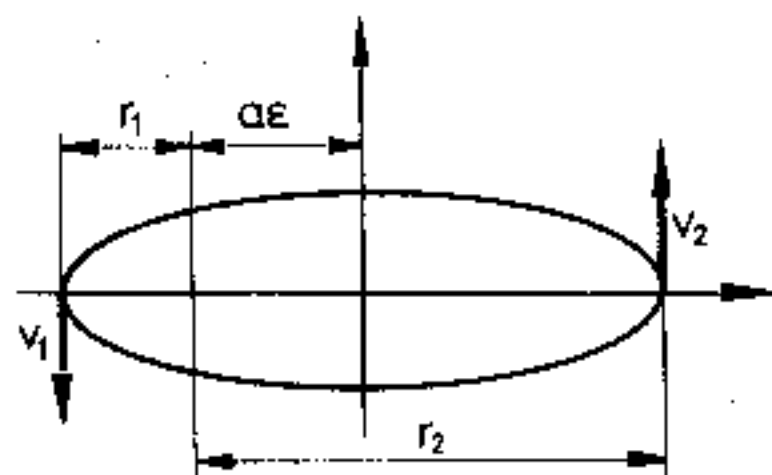
Az egyenletrendszer megoldása:

$$r_1 = \frac{-GM + \sqrt{G^2 M^2 + v_0^4 b^2}}{v_0^2},$$

$$v_1 = v_0 \frac{b v_0^2}{-GM + \sqrt{G^2 M^2 + v_0^4 b^2}}.$$

9.5. Az impulzusnyomaték megmaradását alkalmazva: $v_1 r_1 = v_2 r_2$ (mivel v_1 merőleges r_1 -re és v_2 merőleges r_2 -re), ahol $r_1 = a - a\varepsilon$, $r_2 = a + a\varepsilon$. Ebből

$$v_2 = v_1 \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$$



9.6. a) A hajtómű bekapcsolása utáni állapotokra az energia- és impulzusnyomaték-megmaradás:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{m\alpha}{r_0} = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{m\alpha}{r_M}, \quad m v r_0 = m v_1 r_M$$

Itt $v = 1,08 v_0$ az új sebesség és v_1 a „Föld-távol”-ban (r_M) mért sebesség. Figyelembe véve, hogy $v_0^2 = \alpha/r_0$ (mert az űrhajó eredetileg körpályán mozgott), kapjuk, hogy $r_M \sim 1,4 r_0$.

b) Az új impulzusmomentum $J = m r_0 v = 1,08 J_0$. Ennek segítségével a radiális mozgás $\frac{d^2 u}{d\Theta^2} + u = \frac{m^2 \alpha}{J^2} \left(u = \frac{1}{r} \right)$ differenciálegyenletéből az $u(0) = 1/r_0$ kezdeti feltétellel kapjuk a pálya egyenletét:

$$r = \frac{r_0}{0,86 + 0,14 \cos \Theta}$$

9.7. Minthogy a két csillag között csak a relatív távolságuktól függő gravitációs erő hat, a tömegközéppont mozgása leválasztható a Lagrange-függvényből. A relatív mozgást leíró relatív

Lagrange-függvény:

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{G m_1 m_2}{r}$$

Itt $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ a redukált tömeg és \mathbf{r} a relatív helyvektor.

A mozgásegyenlet:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = - \frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Ennek $|\mathbf{r}| = R$ (állandó) megoldása a *közmozgás*; erre $\mu v^2 = \frac{G m_1 m_2}{R}$. Így a keringési idő: $T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{G(m_1 + m_2)}}$.

9.8. A $6 \cdot 10^6$ km elég kicsi ahhoz, hogy ezen a távolságon a Nap és a többi bolygó potenciálját állandónak vehessük, és így a szondára gyakorolt hatásukat elhanyagolhassuk. Ekkor az energiamegmaradásból kapjuk:

$$\frac{1}{2} v_0^2 - \frac{GM_F}{R} = \frac{1}{2} v^2 - \frac{R}{r} \frac{GM_F}{R}$$

A $\frac{GM_F}{R}$ mennyiség kifejezhető a Föld elhagyásához szükséges

kezdeti sebességgel: $\frac{GM_F}{R} = \frac{1}{2} v_1^2$, és esetünkben $\frac{R}{r} \sim 10^{-3}$,

ezért az energiaegyenlet jobb oldalának második tagját elhanyagolhatjuk. Így a keresett sebesség: $v \sim \sqrt{v_0^2 - v_1^2} \sim 7$ km/s.

9.9. Ha az ágyúgolyó a Földtől néhány, pl. tíz Földsugárnyira eltávolodik, akkor a Föld vonzásából származó (negatív) potenciális energiát nagyrészt leküzdötte. Ezalatt a Nap hatása elhanyagolható. Ezután úgy vehetjük, hogy az ágyúgolyó kikerült a Föld vonzóteréből, és már csak a Nap vonzza. Nem mindegy, hogy milyen irányban löjük ki: a Föld pályamenti sebessége hozzáadódik az ágyúgolyó Földhöz viszonyított sebességéhez, így akkor szükséges a legkisebb energia, ha a sebesség iránya megegyezik a Föld pályamenti mozgásából

származó sebességgel. Ekkor olyan sebessége kell legyen az ágyúgolyónak, hogy még éppen el tudja hagyni a Naprendszer.

Indítsuk a golyót a Földhöz képest v_0 sebességgel.

A Földtől távol a sebességét jelölje v_1 :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G \frac{mM_F}{R_F} = \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (1)$$

A Föld pályamenti sebessége legyen v_F :

$$\frac{v_F^2}{R_{NF}} = G \frac{M_N}{R_{NF}^2}. \quad (2)$$

A $v_F + v_1$ sebességnek akkorának kell lennie, hogy az ágyúgolyó a Naprendszer éppen el tudja hagyni:

$$\frac{1}{2}m(v_F + v_1)^2 - G \frac{mM_N}{R_{NF}} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 = 0. \quad (3)$$

Bevezetve a c_F és c_N szökési sebességeket:

$$c_F^2 = 2G \frac{M_F}{R_F}, \quad c_N^2 = 2G \frac{M_N}{R_{NF}} \quad \left(v_F^2 = \frac{1}{2}c_N^2 \right).$$

Az eredmény: $v_0^2 = (c_N - v_F)^2 + c_F^2 \approx 0,1c_N^2 + c_F^2$.

Próbáljuk a feladatot az energiamegmaradás segítségével megoldani:

A Naphoz rögzített inerciarendszerben a golyó sebessége a kilövés utáni pillanatban ($v_0 + v_F$), a végtelenben $v_\infty = 0$, így az energiamérleg:

$$\frac{1}{2}m(v_0 + v_F)^2 - G \frac{mM_F}{R_F} - G \frac{mM_N}{R_{NF}} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 = 0.$$

Innen

$$v_0 = \sqrt{c_N^2 + c_F^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}c_N;$$

vagy a $c_F \ll c_N$ közelítésben (hogy összehasonlíthassuk az előző

eredménnyel): $v_0^2 \sim 0,1c_N^2 + 0,3c_F^2$, és ez kb. $0,7c_F^2$ -fel kisebb! Az utóbbi eredmény rossz, és ennek az az oka, hogy az ágyúgolyóra nem áll fenn az energiamegmaradás tétele, hiszen időtől függő külső erőterben mozog (a Föld kering a Nap körül, R_{NF} időfüggő; l. a 9.3. feladatot).

A Föld-ágyúgolyó-rendszerre már igaz az energiamegmaradás tétele. A Naphoz rögzített inerciarendszerből nézve a Föld-ágyúgolyó vonzás következtében a Föld kissé felgyorsul, pályamenti sebessége, mozgási energiája nő – ez az ami a fenti energiamérlegből hiányzott! (L. a 7.48. feladatot.)

9.10. A mozgásegyenlet $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$, ahol $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Az erőter centrális,

ezért a mozgásra fennáll az origóra vonatkozó impulzusnyomaték ($\mathbf{J} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$) megmaradása. \mathbf{J} megmaradása azt jelenti, hogy a mozgás \mathbf{J} -re merőleges síkban játszódik le. Az erőter konzervatív is (van potenciál), ezért a mozgásra fennáll az

energia $\left(E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{2}r^2 \right)$ megmaradása is.

A mozgásegyenlet általános megoldása: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}_1 \cos \omega t + \mathbf{c}_2 \sin \omega t$ (a \mathbf{c}_1 és \mathbf{c}_2 vektorokat a kezdeti feltételek határozzák meg). Ha \mathbf{J} irányát választjuk koordináta-rendszerünk z -tengelyéül és $\mathbf{r}(t=0) = (x_0, 0, 0)$; $\dot{\mathbf{r}}(t=0) = (v_x, v_y, 0)$, akkor

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_x}{\omega} \sin \omega t = a \sin(\omega t + \alpha),$$

$$y(t) = \frac{v_y}{\omega} \sin \omega t,$$

$$z(t) \equiv 0, \quad a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_x^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega x_0}{v_x}.$$

A pálya egyenletét az idő kiküszöbölésével kapjuk:

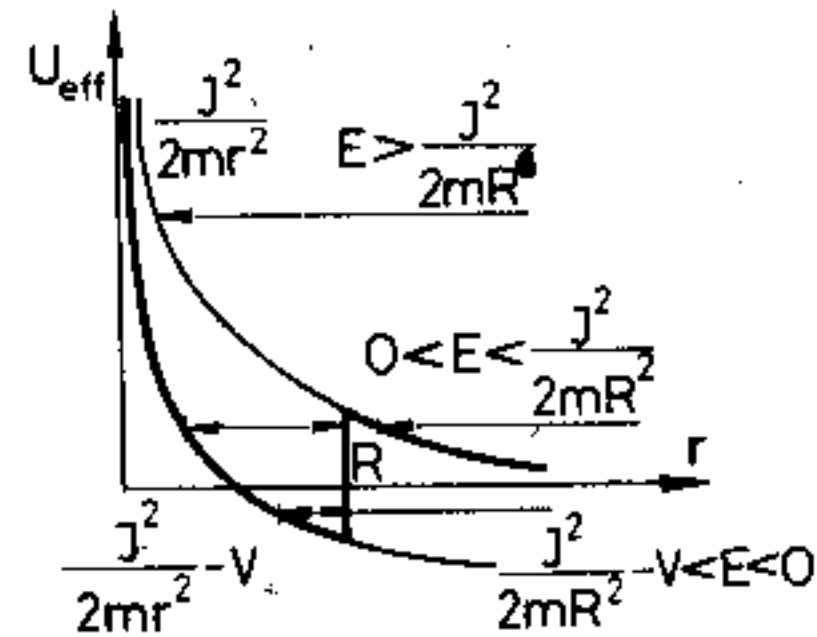
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha \quad \left(b = \frac{v_y}{\omega} \right).$$

Ez egy x, y síkban fekvő ellipszis.

A rezgés periódusideje $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, független a pálya adataitól. (Ez az oszcillátor potenciál speciális tulajdonsága.)

9.11. Az R sugarú gömbön kívül a részecske sebessége $v_k = \sqrt{\frac{2E}{m}}$,

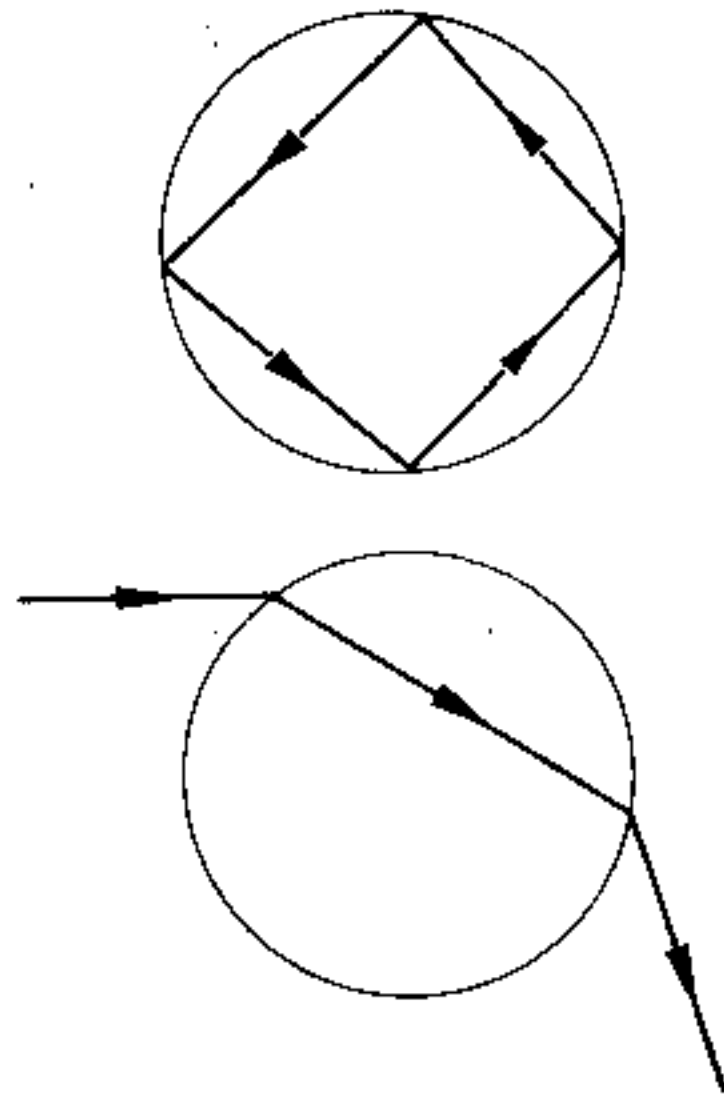
belül $v_b = \sqrt{\frac{2(E+V)}{m}}$. Az E energia és a J impulzusmomentum értékeitől függően a pálya különböző lehet; a mozgás határait az effektív potenciálból határozhatjuk meg:



$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{J^2}{2mr^2}$$

Tehát $\frac{J^2}{2mR^2} - V < E < \frac{J^2}{2mR^2}$

esetén a részecske vagy a gömb belsejében mozog a határokon visszaverődve, vagy pedig ($E > 0$ esetén) a gömbön kívül egyenes vonalban. (Vegyük figyelembe, hogy az impulzusmomentum megmaradás miatt a potenciálgödör falán a pálya megtörhet!) Ha $\frac{J^2}{2mR^2} < E$, akkor lehetséges a következő pálya is:



9.12. $\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{J^2 + 2m\alpha}} \cos \kappa\varphi$; itt $\kappa = \sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{J^2}}$, J pedig az impulzusmomentum.

9.13. $r = \frac{p}{1 + e \cos \kappa\varphi}$, ahol

$$p = \left(\frac{J^2}{m} - 2\beta\right) \frac{1}{\alpha}, \quad \kappa = \sqrt{1 - \frac{2\beta m}{J^2}}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E}{\alpha^2} \left(\frac{J^2}{m} - 2\beta\right)}$$

A perihélium a $\varphi = 0$ szögnek felel meg, ekkor $r_{\text{min}} = p/(1+e)$. Legközelebb akkor lesz a részecske ilyen távolságra a centrumtól, ha $\kappa\varphi = 2\pi$. A φ szöget $2\pi + \Delta\varphi$ alakba írva

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\kappa - 1}{\kappa}$$

a perihélium-elfordulás. Amennyiben $\beta \ll J^2/m$, $\Delta\varphi$ -re $-2\pi\beta m/J^2$ adódik.

9.14. A relatív mozgást a $J = mbv$ impulzusnyomaték és az $E = \frac{m}{2}v^2$

energia jellemzi. Itt $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, a két részecske redukált tömege. (Landau-Lifsic: Mechanika; 13. §). A keresett távolságot az $U_{\text{eff}}(r_{\text{min}}) = E$ egyenlet megoldása adja:

$$\frac{m^2 b^2 v^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}mv^2$$

Ebből

$$r_{\text{min}} = \frac{mb^2v^2}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + m^2b^2v^4}}$$

9.15. ϱ sugarú körpálya akkor alakulhat ki az $U(r)$ potenciálban, ha a $V_{\text{eff}}(r)$ effektív potenciálra fennáll, hogy

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial r} \right|_{r=\varrho} = \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(U(r) + \frac{J^2}{2mr^2} \right) \right|_{r=\varrho} = 0.$$

Ez a körpálya stabil, ha $\left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial r^2} \right|_{r=\varrho} > 0$. Esetünkben ez azt jelenti, hogy $(3-n) \frac{J^2}{m} > 0$.

9.16. A radiális mozgás egyenlete:

$$\ddot{r} - \frac{J^2}{m^2 r^3} = -g(r). \quad (1)$$

Legyen $r = \varrho + x$, ahol x a $\varrho =$ állandó körpályától mért eltérés, és tegyük fel, hogy $\frac{x}{\varrho} \ll 1$. (1) $\frac{x}{\varrho}$ -ban elsőrendig:

$$\ddot{x} - \frac{J^2}{m^2 \varrho^3} \left(1 - 3 \frac{x}{\varrho} \right) = -(g(\varrho) + xg'(\varrho)). \quad (2)$$

Figyelembe véve, hogy a ϱ sugarú körmozgásnál $\dot{r}|_{r=\varrho} = 0$, ezért $g(\varrho) = \frac{J^2}{m^2 \varrho^3}$, azaz (2)-ből:

$$\ddot{x} + \left\{ \frac{3g(\varrho)}{\varrho} + g'(\varrho) \right\} x = 0.$$

9.17. A körpálya stabil, ha $\frac{a}{\varrho} \gtrsim 0,62$.

9.18. *Útmutatás:* Vizsgáljuk meg, hogy a fordulópontokra vonatkozó egyenlet (Landau-Lifsic: Mechanika; 14. §)

$$U_{\text{eff}}(r_{\text{min}}) = E$$

megoldásai hogyan függenek a kezdeti energia- és impulzusnyomaték-értékektől!

9.19. A centrális potenciálban lezajló mozgás trajektóriájában

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr J/r^2}{\sqrt{E - U(r) - J^2/(2mr^2)}}.$$

(Landau-Lifsic: Mechanika; (14.7) képlet.) $n=2$ esetén kis r -ekre az E energiát, az $n>2$ esetre pedig a $J^2/(2mr^2)$ tagot is elhagyhatjuk. Az integrálást elvégezve kapjuk, hogy

$$\varphi = -\frac{J \ln(r/r_0)}{\sqrt{2m\alpha - J^2}} + \varphi_0, \quad \text{ha } n=2, \quad \text{és}$$

$$\varphi = -\frac{2Jr^{-1+n/2}}{\sqrt{2m\alpha(2-n)}}, \quad \text{ha } n>2.$$

A fordulatok száma csak $n=2$ esetén lesz végtelen.

9.20. Az $r(t)$ függés paraméteres egyenlete tetszőleges ε excentricitás esetén (Landau-Lifsic: Mechanika; (15.10) képlet).

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi), \quad t = \frac{1}{\omega} (\xi - \varepsilon \sin \xi),$$

ahol „ a ” a fél nagytengely, $\omega = 2\pi/T$, T a keringési idő. A $\varphi(t)$ függvény az impulzusnyomaték megmaradása alapján számolható, hiszen

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2} = \omega \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{a^2}{r^2}.$$

A feladatot iterációval oldjuk meg. $\varepsilon=0$ esetén

$$r_0 = a, \quad \xi_0 = \omega t, \quad \dot{\varphi}_0 = \omega,$$

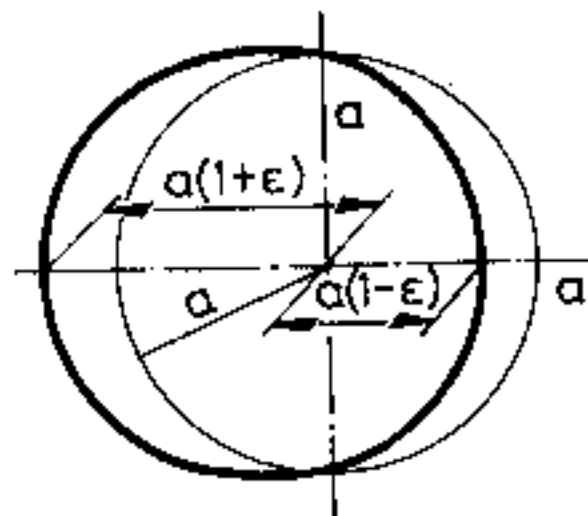
és ez egyenletes körmozgásnak felel meg. ε -ban elsőrendig számolva, az ε -nal arányos tagokban elég a nulladrendű kifejezést, ξ_0 -t megtartani. Így

$$r_1(t) = a(1 - \varepsilon \cos \omega t), \quad \xi_1 = \omega t + \varepsilon \sin \omega t,$$

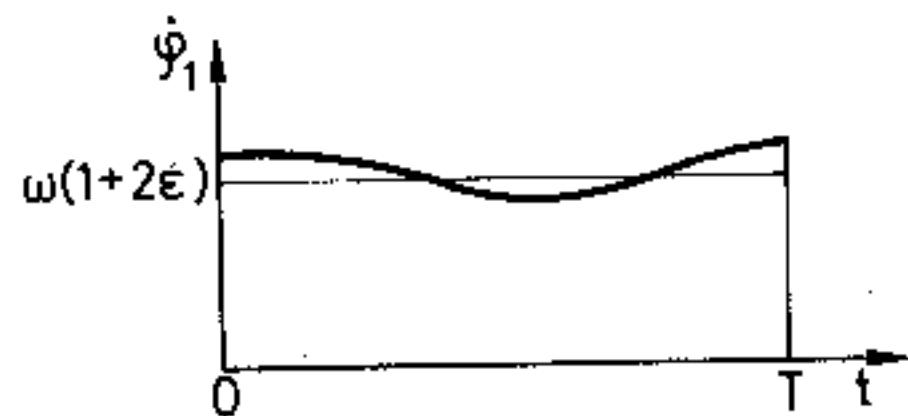
$$\dot{\varphi}_1 = \omega(1 + 2\varepsilon \cos \omega t),$$

$$\varphi_1(t) = \omega t + 2\varepsilon \sin \omega t.$$

$r_1(t)$ -ből leolvasható, hogy az ellipszispálya ε -ban elsőrendig úgy képzelhető el, mint egy „ a ” sugarú körpályára szuperponált $a\varepsilon$ amplitúdójú cosinushullám:



Az $\varepsilon=0$ excentricitáshoz tartozó mozgás ω szögsebességére $2\omega\varepsilon$ amplitúdójú cosinusos tag szuperponálódik, s így a szögsebesség Napközben ($t=0$) a legnagyobb, és Naptávolban a legkisebb.



A másodrendű eredményeket úgy kapjuk, ha az ε -nal arányos tagokban ξ helyébe ξ_1 -et írunk, és sorbafejtés után az ε^2 -nél kisebb nagyságrendű tagokat elhanyagoljuk. Így

$$r_2(t) = a(1 - \varepsilon \cos \omega t + \varepsilon^2 \sin^2 \omega t),$$

$$\varphi_2(t) = \omega \left(1 + 2\varepsilon \cos \omega t + \frac{5}{2} \varepsilon^2 \cos 2\omega t \right),$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = \omega t + 2\varepsilon \sin \omega t + \frac{5}{4} \varepsilon^2 \sin 2\omega t.$$

Megjelent egy $T/2$ periódusidejű periodicitás is. Érdeemes megjegyezni, hogy a bolygó akkor van a kistengely végpontjában, amikor $\xi = \pi/2$; ekkor $r = a$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$.

9.21. A G gravitációs állandó változása a bolygó $\alpha = GMm$ potenciálparaméterének $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \frac{\dot{G}}{G}$ változását okozza. Minthogy a periódusidőhöz képest lassú változásról van szó, az adiabatikus invariánsok segítségével dolgozunk. Esetünkben két adiabatikus invariáns van:

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = M \quad (\text{a bolygó impulzusmomentuma}),$$

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{2}{2\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} p_r dr = -M + \alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

α adiabatikus változásakor I_φ és I_r állandóak, azaz $\frac{\alpha}{\sqrt{|E|}}$ állandó.

Ezért $E \sim \alpha^2$; $T \sim 1/\alpha^2$; $p = \frac{M^2}{m\alpha}$ (a pálya paramétere) $\sim 1/\alpha$; $e = \sqrt{1 + 2EM^2/(m\alpha^2)}$ (a pálya excentricitása) = állandó.

Bonyolultabban számolható ki a perihéliumforgás. U potenciálnál az egy periódus alatti elfordulás Landau szerint

$$\Delta\varphi = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E - U) - M^2/r^2} dr.$$

Esetünkben $U(r, t) = -\frac{1}{r}(\alpha + \dot{\alpha}t) = -\frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\dot{\alpha}t}{\alpha} \right)$, és

$E = E + \dot{E}t = E \left(1 + 2 \frac{\dot{\alpha}t}{\alpha} \right)$. Az időskála kezdőpontját választjuk úgy, hogy $t=0$ -nál r_{\min} legyen; ekkor r_{\max} $T/2$ -nél lesz:

$$\Delta\varphi = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \sqrt{2mE \left(1 + 2 \frac{\dot{\alpha}t}{\alpha} \right) + 2m \frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\dot{\alpha}t}{\alpha} \right) - \frac{M^2}{r^2}}.$$

Vezessünk be új változót, r helyett az $r = \varrho \left(1 - \frac{\dot{\alpha}t}{\alpha}\right)$ definícióval. Így végül

$$\Delta\varphi = -2 \frac{\partial}{\partial M} \int_{\varrho_{\min}}^{\varrho_{\max}} \sqrt{2m \left(E + \frac{\alpha}{\varrho}\right) - M^2/\varrho^2} d\varrho \left(1 - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \frac{\varrho}{\dot{\varrho}}\right).$$

Itt a nulladrendű tag nem ad perihéliumforgást, így

$$\Delta\varphi = 2 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \frac{\partial}{\partial M} \int_{\varrho_{\min}}^{\varrho_{\max}} \frac{\varrho}{\dot{\varrho}} \sqrt{2m \left(E + \frac{\alpha}{\varrho}\right) - \frac{M^2}{\varrho^2}} d\varrho.$$

Nulladrendben $\sqrt{2m \left(E + \frac{\alpha}{\varrho}\right) - \frac{M^2}{\varrho^2}} = m\dot{\varrho}$, így

$$\Delta\varphi = m \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \frac{\partial}{\partial M} (\varrho_{\max}^2 - \varrho_{\min}^2) = m \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} 4a^2 \frac{\partial e(M)}{\partial M} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \frac{2M}{eE}.$$

Látható, hogy $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \beta < 0$ esetén a bolygó „hátrafelé” forog, ellenkező esetben pedig előre.

10. Rezgések

10.1. A mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = mg - kx$$

vagy

$$\ddot{x} = g - \omega^2 x, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

E differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x = \frac{g}{\omega^2} + c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

A kezdeti feltétel:

$$x(t=0) = 0 \quad (\text{az egyensúlyi helyzettől számítjuk a kitérést}),$$

$$\dot{x}(t=0) = 0.$$

Ezekkel:

$$c_1 = -\frac{g}{\omega^2}, \quad c_2 = 0;$$

így a megoldás:

$$x = \frac{g}{\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

10.2. A csillapított rezgés mozgásegyenlete $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$. Vezessük be az $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $2\kappa = \frac{\beta}{m}$ jelölést; ezekkel a megoldás (Budó: Mechanika; 18. §. (8)) $\kappa < \omega_0$ esetén $x(t) = e^{-\kappa t}(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$; $\kappa > \omega_0$ esetén pedig $x(t) = e^{-\kappa t}(c_1 e^{-\gamma t} + c_2 e^{\gamma t})$; $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$. A $\kappa = \omega_0$ esetben $x(t) = e^{-\kappa t}(c_1 + c_2 t)$. (Mindhárom esetben c_1 és c_2 a kezdeti feltételből meghatározandó állandók.) Esetünkben $k = 0,1 \text{ N}/0,08 \text{ m} = 1,25 \text{ kg s}^{-2}$, ezért $\omega_0 = \sqrt{2,5} \text{ s}^{-1}$; $\beta = 0,05 \text{ N}/0,01 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ezért $\kappa = 5 \text{ s}^{-1}$, tehát $\kappa > \omega_0$.

c_1 -et és c_2 -t a kezdeti feltételeknek megfelelően választva, az előző általános megoldásból

$$x(t) = x_0 \frac{e^{-\kappa t}}{\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}} \left\{ \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} \operatorname{ch} t \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} + \kappa \operatorname{sh} t \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} \right\}$$

adódik.

10.3. $\omega_0 = 5 \text{ s}^{-1}$, ezért a $\kappa = \omega_0$ esetnek megfelelő összefüggést kell a kezdeti feltételhez illeszteni: $x(t) = x_0 e^{-\kappa t} (1 + \kappa t)$.

10.4. Ha $\kappa < \omega_0$, akkor a csillapodó rezgés rezgésideje (10.2. feladat) $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$. Másrészt, a csillapodó rezgés egymás utáni amplitúdóira fennáll [Budó: Mechanika: 18. § (13)], hogy $q = A_n/A_{n+1} = e^{\kappa T}$. (Esetünkben $q^3 = 10$.) Innen az ismeretlen κ -t kifejezve: $\kappa = (\omega_0 \ln q)/\sqrt{4\pi^2 + \ln^2 q}$. ω_0 az adatokból meghatározható: $\omega_0^2 = k/m = 0,5 \text{ s}^{-2}$; így $T = 13,88 \text{ s}$.

10.5. Az első esetben mindkét rugón ugyanakkora a feszültség; ezért az „eredő direkciós erő” $k = (k_1^{-1} + k_2^{-1})^{-1}$; a második esetben a két rugó megnyúlása egyezik meg, ezért ekkor az eredő direkciós erő: $k = k_1 + k_2$. A mozgásegyenletek: $\ddot{x} = g - \omega_1^2 x$, ill. $\ddot{x} = g - \omega_2^2 x$, ahol $\omega_1^2 = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}$ és $\omega_2^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$.

10.6.

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$$

10.7. A rugalmatlan ütközésre fennáll az impulzusmegmaradás: $mv_0 = (m+M)v_1$. A v_0 sebesség az m egyensúlyi helyzetében felvett sebessége: $v_0 = A\omega_0$. A rezgésidő azért változik, mert ugyanannak a rugónak most $m+M$ tömeget kell mozgatni:

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m+M} = \frac{m}{m+M} \omega_0^2, \quad \text{tehát} \quad T_1 = T_0 \sqrt{(m+M)/m}.$$

Az ütközés utáni mozgás: $x(t) = B \sin \omega_1 t$; a B -t az $\dot{x}(0) = v_1$ kezdeti feltételből kapjuk: $B = A \sqrt{\frac{m}{M+m}}$.

10.8. Vegyük észre, hogy az ütközés helye az $(m+M)$ -mel terhelt rugónak *nem* egyensúlyi helyzete! Így $A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2hk}{g(M+m)}}$.

10.9. A rendszer mozgása közben a legnagyobb gyorsulás:

$$a = A\omega^2 = A \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2.$$

A testre ható legnagyobb erő tehát

$$F_{\max} = ma = mA \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2.$$

Ezt a súrlódási erő hozza létre; megcsúszáskor ez éppen

$$F_s = \mu mg = F_{\max},$$

ahonnan

$$\mu = A \frac{4\pi^2}{gT^2} \sim 0,4.$$

10.10. m_2 akkor nem ugrik fel, ha a rezgés maximális gyorsulása kisebb g -nél. Ebből kapjuk, hogy a rugót legfeljebb $\frac{g}{k}(m_1 + m_2)$ távolsággal lehet összenyomni.

10.11. a) A síklengés során a mozgásegyenlet:

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi.$$

Kis lengéskor $\sin \varphi \sim \varphi$, vagyis $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi$, így a periódus-

$$\text{idő } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

b) A kis kör mentén történő mozgásnál a Lagrange-féle első-fajú mozgásegyenlettel dolgozunk; a kényszerfeltétel:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - l^2) = 0,$$

ezért a mozgásegyenletek:

$$m\ddot{x} = \lambda x, \quad m\ddot{y} = \lambda y, \quad m\ddot{z} = \lambda z - mg.$$

$z = \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} \sim l$ (mivel a gömbinga kis kör mentén mozog), ezért $\ddot{z} = 0$, ahonnan $\lambda = -\frac{mg}{l}$.

Ezzel a mozgásegyenletek:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x, \quad \ddot{y} = -\frac{g}{l}y,$$

így a periódusidő: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

10.12. A csillapódó gerjesztett oszcillátor mozgásegyenlete

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = A \cos \omega t; \quad \beta = \frac{\alpha}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

$$A = \frac{F_0}{m}. \quad (1)$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$x_h(t) = e^{-\beta t} [B e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + C e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}].$$

Az inhomogén egyenletét $x_i(t) = D \cos(\omega t - \delta)$ alakban keresve (1)-ből kapjuk:

$$D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}, \quad \delta = \arctg \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2)$$

Az általános megoldás $x(t) = x_h(t) + x_i(t)$, azonban $t \gg \beta^{-1}$ esetén az $x_h(t)$ -vel leírt tranzienst jelenségek exponenciálisan lecsökkennek, és így ebben az időtartományban $x(t) = x_i(t)$. δ írja le a gerjesztő erő és a kényszerrezgés közötti fáziskülönbséget: rögzített ω_0 mellett δ a 0-tól ($\omega=0$) $\frac{\pi}{2}$ -ig ($\omega=\omega_0$), majd

$\omega \rightarrow \infty$ esetén π -ig nő.

A rezonanciafrekvenciát a $\frac{dD}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_r} = 0$ egyenletből kapjuk:

$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Így a csillapítás növelésével a rezonanciafrekvencia csökken.

10.13.

$$A = \frac{kx_0}{\sqrt{(k-m\omega)^2 + b^2\omega^2}}$$

10.14. a) $x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t).$

b) $x = \frac{a}{m\omega^3} (\omega t - \sin \omega t).$

c) $x = \frac{F_0}{m(\omega^2 + q^2)} \left(e^{-at} - \cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t \right).$

10.15. A τ ideig ható állandó F_0 erőt tekintsük a kezdetben ($t=0$) „bekapcsolt” állandó F_0 , és a $t=\tau$ időpontban „bekapcsolt” $-F_0$ erő eredőjének. A 10.14. feladat a) kérdésében az $x(0)=\dot{x}(0)=0$ kezdeti feltétel mellett az állandó F_0 hatására kialakuló mozgásra azt kaptuk, hogy $x_1(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$.

A $t=\tau$ időben bekapcsolt $-F_0$ hatására kialakuló mozgás ezért $x_2(t) = -\frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega(t - \tau))$.

Az oszcillátor mozgásegyenlete lineáris differenciálegyenlet; ezért igaz rá a szuperpozíció elve: két megoldás összege is megoldás. Ezért feladatunk megoldása: $x(t) = x_1(t) + x_2(t) =$

$= \frac{F_0}{m\omega^2} [\cos \omega(t - \tau) - \cos \omega t]$. $\tau \rightarrow 0$, $F_0, \tau =$ állandó esetén a zárójelben álló kifejezést sorbafejtve, a legelső el nem tűnő tagból

$$x(t) = \frac{b}{m\omega} \sin \omega t \quad (b = F_0\tau).$$

A véges τ ideig ható erőlkés akkor tekinthető közelítőleg pillanatszerűnek, ha τ sokkal kisebb az oszcillátor mozgásának karakterisztikus idejénél, a rezgésidőnél: $\tau \ll \frac{2\pi}{\omega}$.

10.16.

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{m\omega} \sin \omega(t - t'), & \text{ha } t \geq t', \\ 0, & \text{ha } t < t'. \end{cases}$$

10.17.

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{m\omega_1} e^{-\kappa(t-t')} \sin \omega_1(t-t'), & \text{ha } t \geq t', \\ 0, & \text{ha } t < t'; \end{cases}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}; \quad 2\kappa = \frac{\alpha}{m}.$$

10.18. a)

$$x(t) = \frac{1}{2\mu} \{\xi_1(t) + \xi_2(t)\},$$

$$\xi_{1,2}(t) = e^{\pm\mu t} \left[\int_0^t \frac{1}{m} F(\tau) e^{\mp\mu\tau} d\tau + \mu x_0 \pm \dot{x}_0 \right].$$

b)

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left\{ e^{i\omega t - \lambda t} \left[\int_0^t \frac{1}{m} F(\tau) e^{i\lambda\tau - i\omega\tau} d\tau + \dot{x}_0 + (i\omega + \lambda)x_0 \right] \right\}; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.$$

10.19. A mozgási energia átlagértéke $\bar{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt$; itt

$T = 2\pi/\omega$ az oszcillátor rezgésideje és $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$. Az

integrálást elvégezve $\bar{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{4} m A^2 \omega^2 = \frac{E}{2}$. A potenciális ener-

gia átlagára hasonló módon kapjuk, hogy $\bar{E}_{\text{pot}} = \frac{E}{2}$.

10.20. a) Ha kezdetben az oszcillátor nyugalomban volt, akkor Landau-Lifsic: Mechanika (22.12) egyenlete szerint a felvett

energia $E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2$. Az integrálást elvégez-

ve: $E = \frac{\pi F_0^2}{2m} \tau^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \omega^2 \tau^2\right)$. E lényegesen függ attól,

hogy az erőt milyen „gyorsan” kapcsoljuk be, illetve ki; a felvett energia a pillanatszerű ütés ($\omega\tau \ll 1$), illetve a nagyon lassú bekapcsolás ($\omega\tau \gg 1$) esetén is kicsi.

b) Ebben az esetben $\Delta E = E(+\infty) - E(-\infty) = \frac{\pi F_0^2}{2m} \tau^2 e^{-\frac{1}{2}(\omega\tau)^2} - \sqrt{\pi} a \omega \tau F_0 e^{-\frac{1}{4}(\omega\tau)^2} \sin \varphi$. Itt φ az oszcillátor fázisa: $t \rightarrow -\infty$ esetén $x(t) \approx a \sin(\omega t - \varphi)$.

10.21. Ha r jelöli M -nek az AB tengely közepétől mért távolságát, akkor M Lagrange-függvénye $L = \frac{1}{2} M(\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) - kr^2$. Így

M mozgásegyenlete: $\ddot{r} + (\omega_0^2 - \omega^2)r = 0$; $\omega_0^2 = \frac{2k}{M}$. Ha

$\omega < \sqrt{\frac{2k}{M}}$, akkor az M tömeg $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$ frekvenciával

harmonikus rezgést végez; ha $\omega > \sqrt{\frac{2k}{M}}$, akkor a mozgás-

egyenlet csak instabil megoldásokat enged meg; ez azt jelenti, hogy ekkor M az AB tengely egyik végére kerül. $\omega = \omega_0$ esetén M minden pontban egyensúlyban lesz.

10.22. Legyen a rugók feszültsége f . Kis kitérésekre (azaz, ha $|y| \ll \sqrt{\frac{fl}{k}}$, ahol l a rugók nyugalmi hossza) a rezgés harmonikus,

$$y = A \cos(\omega t + \varphi); \quad \omega^2 = \frac{2f}{ml}.$$

Ha a rugók kezdetben feszültségmentesek ($f=0$), akkor a rezgés nemlineáris, a kis kitérés esetén ébredő visszatérítő erő:

$$F = -k \frac{y^3}{l^2}.$$

Ebben az esetben a mozgás az elliptikus függvények segítségével tárgyalható. Míg az előző esetben a rezgés frekvenciája független az amplitúdótól, addig itt $\omega \sim A$.

10.23. A rendszer Lagrange-függvénye (Landau-Lifsic: Mechanika 5. §. 4. feladat):

$$L = ma^2[\dot{\vartheta}^2(1 + 2 \sin^2 \vartheta) + \Omega^2 \sin^2 \vartheta + 2\Omega_0^2 \cos \vartheta];$$

$$\Omega_0^2 = \frac{2g}{a}.$$

Ha $\Omega > \Omega_0$, a rendszer potenciális energiájának

$$U(\vartheta) = -ma^2(\Omega^2 \sin^2 \vartheta + 2\Omega_0^2 \cos \vartheta)$$

minimuma van $\cos \vartheta_0 = \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}$ esetén.

Mind a kinetikus, mind a potenciális energiát fejtsük sorba $\vartheta = \vartheta_0$ körül, legalacsonyabb rendben:

$$1 + 2 \sin^2 \vartheta = 1 + 2 \sin^2 \vartheta_0 = 3 - 2 \left(\frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^4 \equiv \frac{M}{2ma^2}; \quad U'' \equiv k.$$

Ekkor

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2; \quad x = \vartheta - \vartheta_0.$$

Innen

$$\omega^2 = \frac{k}{M} = \Omega^2 \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}.$$

Ha $\Omega = \Omega_0$, az $U(\vartheta)$ potenciális energiának minimuma van $\vartheta_0 = 0$ -nál, és ennek közelében $U = ma^2\Omega_0^2 \left(-2 + \frac{\vartheta^4}{4} \right)$ alakú, azaz a rezgés nemlineáris. Mi történik $\Omega < \Omega_0$ esetén?

10.24. A Lagrange-függvény:

$$L = ml^2 \left\{ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{a}{l} \gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi + \frac{g}{l} \cos \varphi \right\}.$$

Itt a az inga felfüggesztési pontjának rezgési amplitúdója. Az ingára ható, időben gyorsan változó „erő”: $f = -ml\gamma^2 \cos \gamma t \sin \varphi$. $\gamma \gg \sqrt{\frac{g}{l}}$ esetén ez az időben gyorsan

változó erő leírható egy effektív potenciális energiával (Landau-Lifsic: Mechanika (30.8) összefüggés) $V_{\text{eff}} = V + f^2/(2m\gamma^2)$. Esetünkben $V_{\text{eff}} = mgl(-\cos \varphi + [a^2\gamma^2 \sin^2 \varphi]/(4gl))$. A stabil egyensúlyi helyzetet ennek a függvénynek a minimuma adja meg. Az $a^2\gamma^2 > 2gl$ esetben a felső függőleges helyzet ($\varphi = \pi$) is stabil.

10.25. $\omega = \frac{\sqrt{3J}}{mg} \sin \alpha$; itt J a (megmaradó) impulzusmomentum.

10.26. A 11.28. feladatban fölirt Lagrange-függvény alapján a mozgásegyenlet:

$$\ddot{\vartheta} = \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - \omega_{\text{kr}}^2 \sin \vartheta.$$

Jelölje α a stacionárius értéktől való eltérést, és $\alpha_0 \ll 1$ a rezgés amplitúdóját. A $\vartheta = 0$ helyzet körüli rezgésekre

$$\ddot{\alpha} = -\alpha(\omega_{\text{kr}}^2 - \omega^2) + O(\alpha^3),$$

amiből a keresett frekvencia

$$\Omega_1 = \sqrt{\omega_{\text{kr}}^2 - \omega^2}.$$

Az egyenletből leolvasható, hogy a $\vartheta = 0$ helyzet csak $\omega < \omega_{\text{kr}}$ esetén stabil.

A $\vartheta_0 = \arccos(\omega_{\text{kr}}^2/\omega^2)$ stacionárius állapot körüli kis rezgésekre az

$$\ddot{\alpha} = -\alpha(\omega^4 - \omega_{\text{kr}}^2)/\omega^2 + O(\alpha^3)$$

egyenletet kapjuk, melyből $\omega > \omega_{\text{kr}}$ -ra

$$\Omega_2 = \frac{\sqrt{\omega^4 - \omega_{\text{kr}}^2}}{\omega}.$$

A kritikus szögsebességhez közeledve a frekvenciák nullához

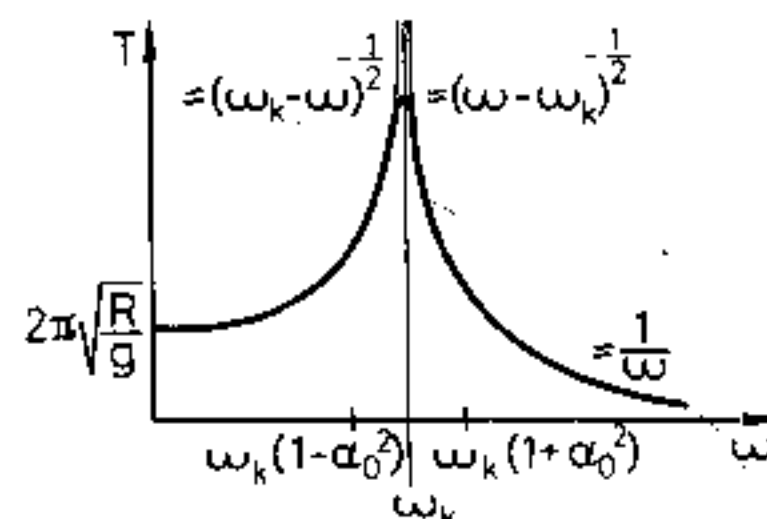
tartanak (kritikus lelassulás), méghozzá mindkét esetben a frekvenciakülönbség négyzetgyökével:

$$\Omega_1 = \omega_{kr} \sqrt{2} \sqrt{\frac{\omega_{kr} - \omega}{\omega_{kr}}}, \quad \Omega_2 = \omega_{kr} 2 \sqrt{\frac{\omega - \omega_{kr}}{\omega_{kr}}}$$

Nem szabad azonban elfelejteni, hogy az $\omega \rightarrow \omega_{kr}$ esetben a lineáris közelítés érvényét veszti. Ha ugyanis $|\omega - \omega_{kr}|/\omega_{kr}$ már összemérhető α_0^2 -tel, akkor mindkét esetben azonos nagyságrendű tagok adódnak a harmadrendű járulékokból is. Ekkor az

$$\ddot{\alpha} = -\Omega^2 \alpha + a \alpha^3$$

típusú egyenletet kellene megoldani, mely véges Ω értéket adna $\omega = \omega_{kr}$ esetén is (l. a 8.8 feladat megoldását). Így végeredményben a rezgésidő szögsebességfüggése a következő grafikkal jellemezhető:



10.27. $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{l}{h}},$ ha $h > l,$

$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{h^2}{l^2}},$ ha $h < l.$

10.28. $m < m_{kr} = 2dk^2/(gh)$ esetén a stabil egyensúlyi helyzet a függőleges rúdállás. A kis rezgések frekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\frac{m - m_{kr}}{m}}$$

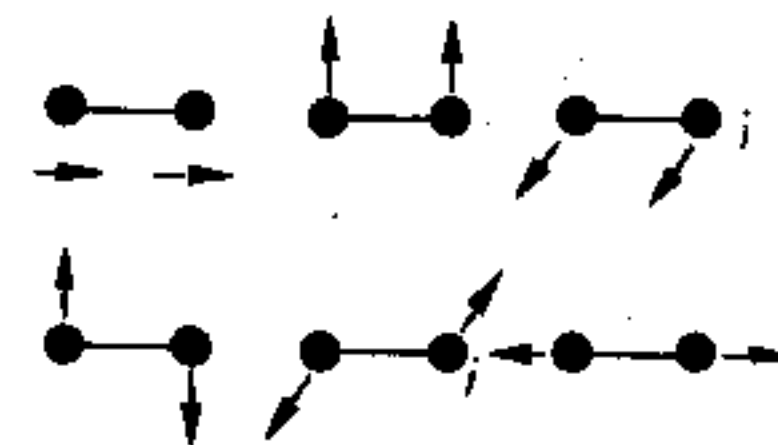
$m > m_{kr}$ esetén a rúd kihajlik. A függőlegessel bezárt szögre:

$$\cos \varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{m_{kr}}{m}}$$

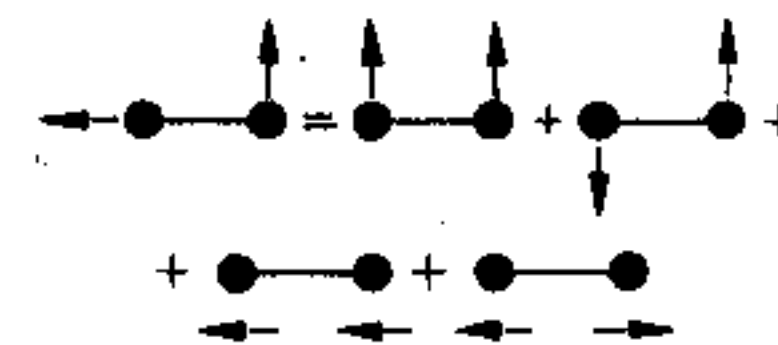
A kis rezgések frekvenciája

$$\omega = \sqrt[3]{\frac{g}{l}} \sqrt[3]{\left(\frac{m}{m_{kr}}\right)^{1/3} - \left(\frac{m_{kr}}{m}\right)^{1/3}}$$

10.29. a) A 6 szabadsági fok 3 translációra (3 egymásra merőleges irányban) 2 forgásra (a molekula tengelyére merőleges irányok körül) és 1 rezgésre (a molekula hossz tengely mentén) oszlik:

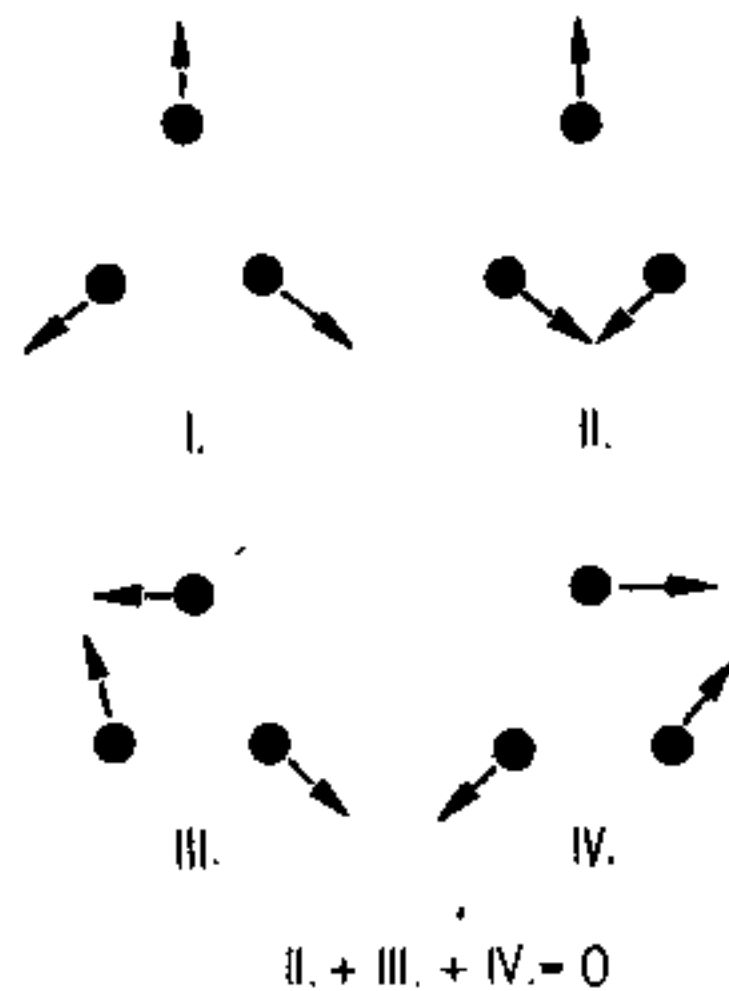


b) Az első öt nem változtatja meg a molekula alakját, 0 frekvencia tartozik hozzá; a hatodikhoz $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega.$



10.30. A molekula $3 \times 3 = 9$ szabadsági foka 3 translációra, 3 forgatásra és 3 rezgésre oszlik. A forgatásokhoz és translációk-

hoz $\omega = 0$ frekvencia tartozik, így 3 sajátrezgés van (ezek a tömegközéppontot helyben hagyják). A rezgések:



10.31. a)

$$x_{1,2} = \frac{v}{2} \left(\frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \pm \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right); \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m},$$

$$\omega_2^2 = \frac{2k_1 + k}{m}.$$

$k_1 \ll k$ esetén a rezgések lebegésszerűek lesznek:

$$x_1 = \frac{v}{\omega_1} \cos \epsilon t \sin \omega_1 t, \quad x_2 = -\frac{v}{\omega_1} \sin \epsilon t \cos \omega_1 t;$$

$$\epsilon = \frac{k_1}{2k} \omega_1.$$

b) $x_{1,2} = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t \pm \cos \omega_2 t)$. $k_1 \ll k$ esetén

$$x_1 = a \cos \epsilon t \cos \omega_1 t, \quad x_2 = a \sin \epsilon t \sin \omega_1 t.$$

Az első részecskéről dt idő alatt a másikra áramlott energia az $F = k(x_1 - x_2)$ erő munkájával egyenlő:

$$dE = k(x_1 - x_2) dx_2 = k(x_1 - x_2) \dot{x}_2 dt,$$

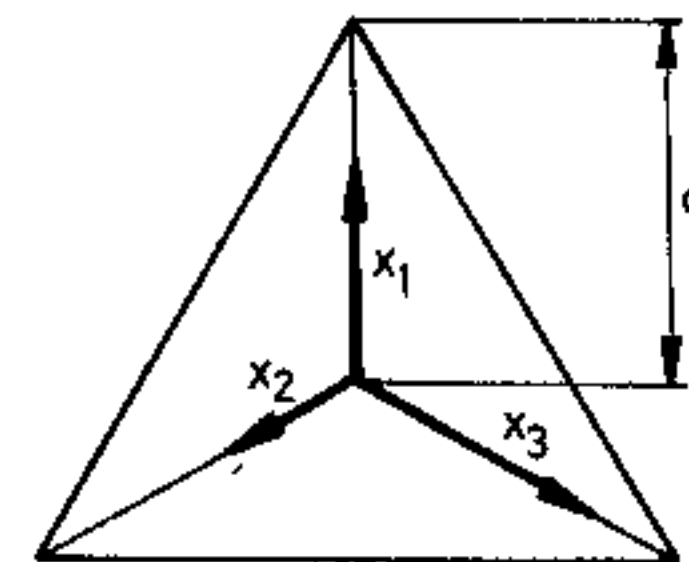
és így az energiaáram

$$\frac{dE}{dt} = k(x_1 - x_2) \dot{x}_2.$$

Az a) esetben $k_1 \ll k$ esetén a gyors rezgés periódusára átlagolt energiaáram a lebegési frekvenciával váltakozó előjelű, $\frac{mv^2}{2} \omega_1 \sin \epsilon t$.

10.32. Jelölje x_i ($i = 1, 2, 3$) a részecskék távolságát a háromszög középpontjától; ekkor (a cosinustételt használva) a rendszer potenciális energiája

$$V = \frac{k}{2} \left\{ \sum_i (a - x_i)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 + x_3^2 + x_1 x_3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3 \right\}.$$



Az egyensúlyi helyzetet a $\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$ egyenlet megoldásából kapjuk: $x_i^0 = \frac{a}{4}$. Ha a részecskék elmozdulását egyensúlyi helyzetüktől számítjuk: $x_i = y_i + \frac{a}{4}$, a potenciális energia

$$V = \frac{k}{2} \left\{ 3 \sum_i y_i^2 + y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 \right\} = \frac{k}{2} \sum_{i,j} a_{ij} y_i y_j$$

ahol $a_{ij} = a_{ji}$ és $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 3$; $a_{12} = a_{13} = a_{23} = \frac{1}{2}$. A sajátfrekvenciákat meghatározó szekuláris egyenlet [Landau-Lifsic: Mechanika (23.8)]:

$$\det |ka_{ij} - \omega^2 m \delta_{ij}| = 0.$$

Az $\omega_0^2 = k/m$ és a $z = 3 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ jelöléssel ez az egyenlet a $z^3 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{4} = 0$ alakba írható. A bal oldal $(z+1)\left(z - \frac{1}{2}\right)^2$, tehát a gyökök $z = -1$ és $z = \frac{1}{2}$ (ez utóbbi kétszeres gyök). A megfelelő sajátfrekvenciák:

$$\omega_1 = 2\omega_0 \quad \text{és} \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

10.33. A jelölés egyszerűsítése céljából válasszunk olyan egységrendszert, melyben a távolságot az l ingahosszban, a tömeget az m ingatömegben és a gyorsulást g -ben mérjük. Ekkor $T = \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_1^2 + \dot{\Theta}_2^2)$, $U = \frac{1}{2}(\Theta_1^2 + \Theta_2^2 - 2\varepsilon \Theta_1 \Theta_2)$. A sajátfrekvenciákat meghatározó $\det(A_{ik} - m_{ik}\omega^2) = 0$ szekuláris egyenletben szereplő tenzorok esetünkben:

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Innen $\omega_{1,2} = \sqrt{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \frac{\varepsilon}{2}$. A Θ_i koordinátákat és a q_i normálkoordinátákat összekapcsoló M mátrixra $\left(\Theta_i = \sum_j M_{ij} q_j\right)$ a mozgásegyenlet $\sum_j (A_{jk} - \omega^2 m_{jk}) M_{jr} = 0$. Innen az $M_{jr} M_{js} =$

$= \delta_{rs}$ normálási feltétellel

$$M_{11} = M_{21} = M_{12} = -M_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A $\Theta_1(0) = \Theta_{10}$; $\Theta_2(0) = \Theta_{20}$; $\dot{\Theta}_1(0) = \dot{\Theta}_2(0) = 0$ kezdeti feltételekkel a normálmódusok

$$q_1(t) = \frac{\Theta_{10} + \Theta_{20}}{\sqrt{2}} \cos \omega_1 t, \quad q_2(t) = \frac{\Theta_{10} - \Theta_{20}}{\sqrt{2}} \cos \omega_2 t.$$

A $\Theta_{20} = 0$ esetben a koordinátákra kapjuk, hogy $\Theta_1(t) = \Theta_{10} \cos \frac{\varepsilon}{2} t \cos t$, $\Theta_2(t) = \Theta_{10} \sin \frac{\varepsilon}{2} t \sin t$. Látszik, hogy a csatolás miatt mindkét inga időben lassan változó amplitúdóra $\left(\Theta_{10} \cos \frac{\varepsilon}{2} t, \text{ ill. } \Theta_{10} \sin \frac{\varepsilon}{2} t\right)$ tett szert. $t = \frac{\pi}{\varepsilon}$ -ban az (1) inga amplitúdója 0 lesz; az összes energia a (2) ingára folyt át.

10.34. Legyen x_i az i -edik tömeg elmozdulása a kör mentén. A rendszer Lagrange-függvénye

$$L = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 - \frac{k}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2].$$

A három tömeg egyenlő szögsebességgel foroghat: $x_1 = x_2 = x_3 = C_1 t + C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} q_1(t)$; a megfelelő frekvencia: $\omega_1 = 0$.

A rezgések körül ugyanazt a frekvenciát kapjuk, ha az A és a B tömeg rezeg egymással szemben, egyenlő amplitúdóval:

$$x_1 = -x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} q_2(t) = C_3 \cos(\omega_2 t + C_4); \quad x_3 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{3k}{m},$$

vagy ha a B és a C rezeg egymással szemben, egyenlő amplitúdóval:

$$x_2 = -x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} q_3(t) = C_5 \cos(\omega_3 t + C_6), \quad x_1 = 0,$$

$\omega_3 = \omega_2$. A \mathbf{r} „elmozdulásvektor” ($\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$) segítségével

$$\text{a fenti három rezgést } \mathbf{r}_1 = \frac{q_1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1); \quad \mathbf{r}_2 = \frac{q_2}{\sqrt{2}}(1, -1, 0);$$

$\mathbf{r}_3 = \frac{q_3}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$ alakba írhatjuk. \mathbf{r}_i már majdnem a normálmódusokat adja, mert a három vektor lineárisan független; de a normálmódusoknak *ortogonálisnak* kell lenniük. Mínt hogy $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2=0=\mathbf{r}_1\mathbf{r}_3$, és csak az azonos frekvenciához tartozó \mathbf{r}_2 és \mathbf{r}_3 vektorokra $\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \neq 0$, így \mathbf{r}_2 és \mathbf{r}_3 helyett az ortogonális $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2$; $\mathbf{r}'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{r}_2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{r}_3 = \frac{q_3}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ vektorokat bevezetve, már a normálmódusokat kapjuk. Az

$$x_1 = \frac{q_1}{\sqrt{3}} + \frac{q_2}{\sqrt{2}} + \frac{q_3}{\sqrt{6}}; \quad x_2 = \frac{q_1}{\sqrt{3}} - \frac{q_2}{\sqrt{2}} + \frac{q_3}{\sqrt{6}};$$

$$x_3 = \frac{q_1}{\sqrt{3}} - \frac{2q_3}{\sqrt{6}}$$

helyettesítés a Lagrange-függvényt az

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega_2^2 q_2^2 + \dot{q}_3^2 - \omega_3^2 q_3^2)$$

alakba transzformálja.

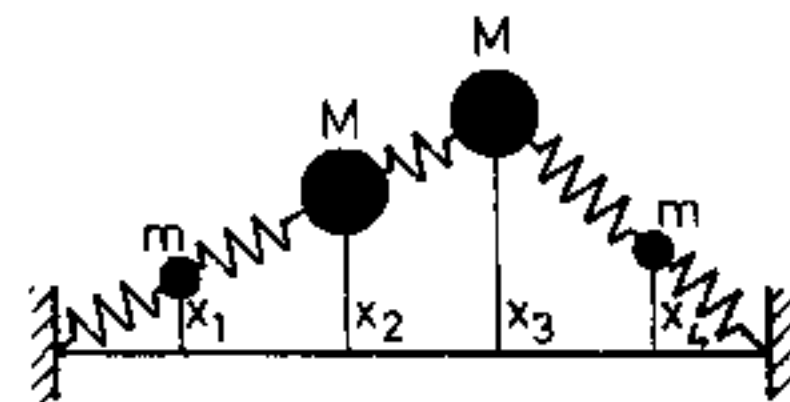
10.35. A mozgásegyenletek lineáris közelítésben:

$$m\ddot{x}_1 = \frac{F}{d}(-2x_1 + x_2),$$

$$M\ddot{x}_2 = \frac{F}{d}(x_1 - 2x_2 + x_3),$$

$$M\ddot{x}_3 = \frac{F}{d}(x_2 - 2x_3 + x_4),$$

$$m\ddot{x}_4 = \frac{F}{d}(x_3 - 2x_4).$$



Bevezetve az $u_{1,4} \equiv \sqrt{m}x_{1,4}$ és $u_{2,3} \equiv \sqrt{M}x_{2,3}$ új változókat, a mozgásegyenlet mátrixa szimmetrikussá válik.

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{F}{d} \begin{pmatrix} -\frac{2}{m} & \frac{1}{\sqrt{mM}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{mM}} & -\frac{2}{M} & \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} & -\frac{2}{M} & \frac{1}{\sqrt{mM}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{mM}} & -\frac{2}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}.$$

Az $x_1 \leftrightarrow x_4$, $x_2 \leftrightarrow x_3$ tükrözés

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixa valóban felcserélhető \mathbf{A} -val, továbbá $\mathbf{T}^2 = \mathbf{E}$ miatt sajátértékei $+1$ vagy -1 . Az előbbi – a páros eset – sajátvektoraira fennáll, hogy

$$u_1 = u_4, \quad u_2 = u_3,$$

és emiatt a 4 szabadsági fokú rezgési probléma 2 szabadsági fokúra redukálódik:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{F}{d} \begin{pmatrix} -\frac{2}{m} & \frac{1}{\sqrt{mM}} \\ \frac{1}{\sqrt{mM}} & -\frac{1}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \equiv -\omega^2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

A sajátfrekvenciák:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{F}{d} \left[\frac{1}{m} + \frac{1}{2M} \pm \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{4M^2}} \right].$$

Hasonlóan a páratlan megoldásokra:

$$u_1 = -u_4, \quad u_2 = -u_3;$$

ilyenkor

$$\omega_{3,4}^2 = \frac{F}{d} \left[\frac{1}{m} + \frac{3}{2M} \pm \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{9}{4M^2} - \frac{2}{mM}} \right]$$

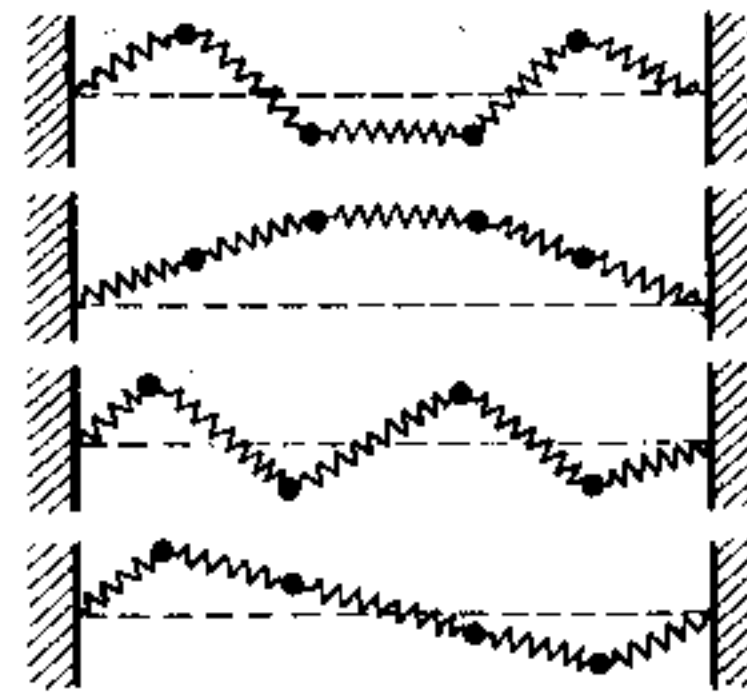
Azonos tömegek esetén a sajátfrekvenciák ($\sqrt{F/(dm)}$ egységekben) és a normálmodusok:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}};$$

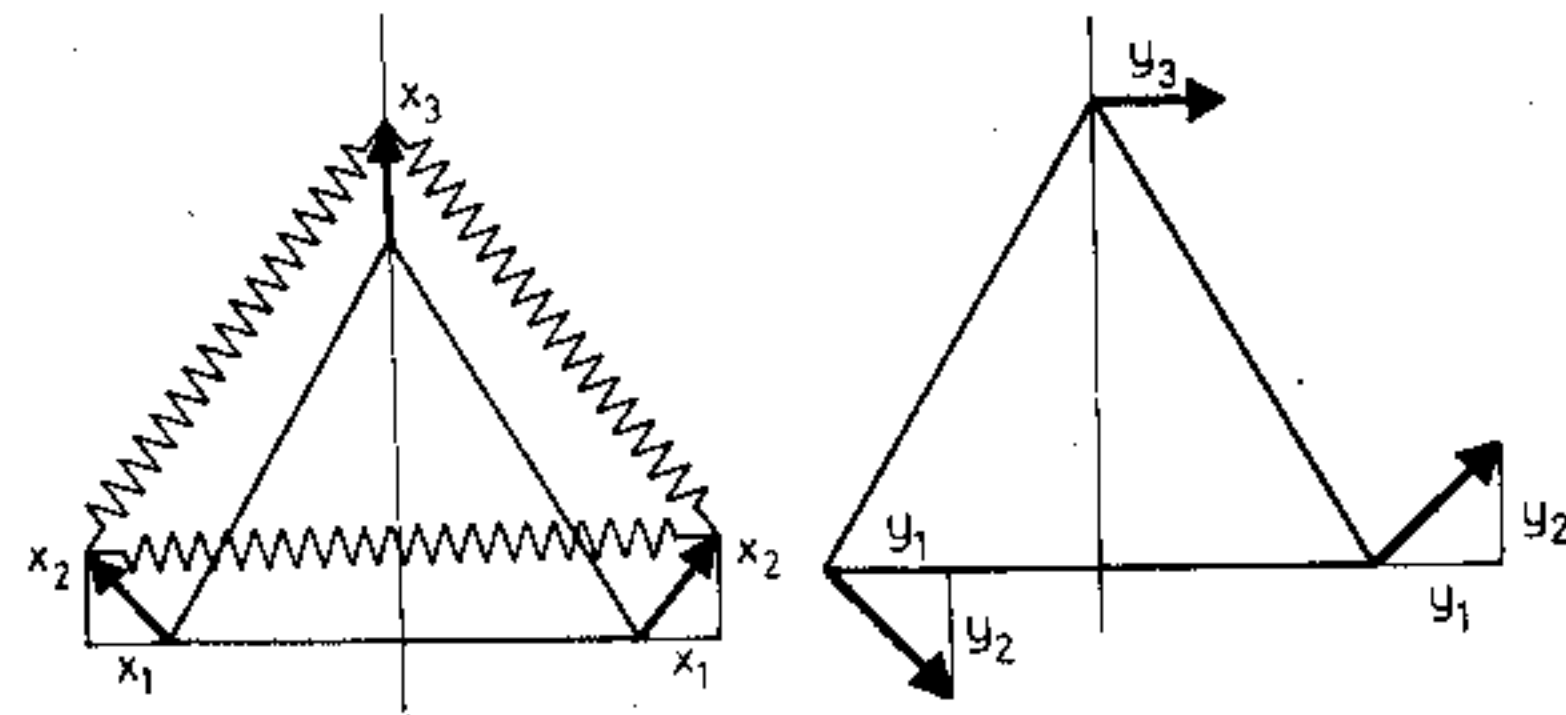
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}};$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}};$$

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$



10.36. Az egyik magasságvonalra történő tükrözés például szimmetriatranszformációja a rendszernek, ezért kereshetjük a normálrezgéseket ezen tükrözésre páros, illetve páratlan alakban. Így a 6 szabadsági fokú rendszer karakterisztikus egyenlete két, harmadfokú egyenletre esik szét.

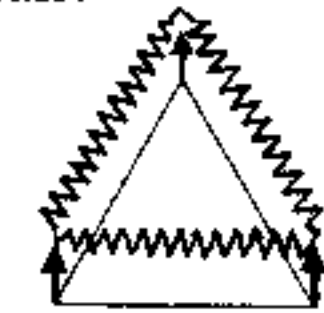


A páros megoldás mozgásegyenlete az ábra jelöléseivel:

$$-m\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

A sajátfrekvenciák és a normálkoordináták:

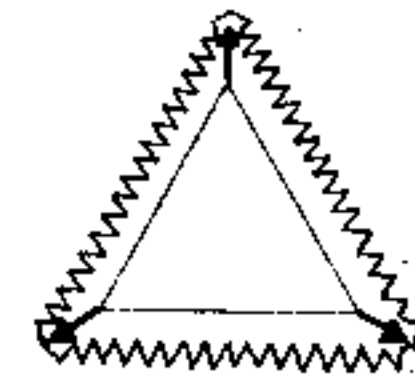
a) $\omega_1 = 0, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$



b) $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$



c) $\omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

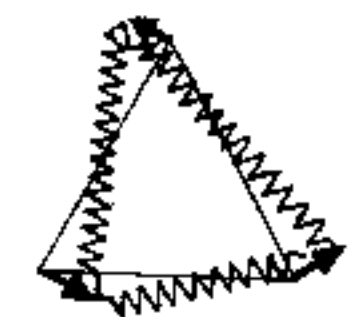


A páratlan megoldások hasonlóan kaphatók: az alábbi ábrán látható módon jelölve az elmozdulásokat, a sajátrezgések:

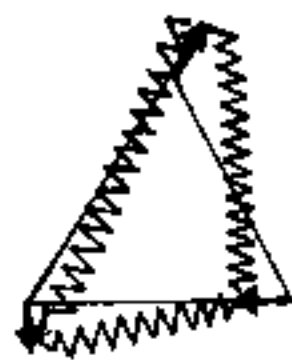
d) $\omega_4 = 0, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$



e) $\omega_5 = 0, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}.$



$$f) \quad \omega_6 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$$



10.37. a) A csillapítatlan oszcillátorra az $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=0$ kezdeti feltétellel $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$, $\dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t$. Az x , \dot{x}/ω_0 fázisgörbe ezért egy x_0 sugarú kör.

b) ha $F_0 \neq 0$, akkor egy-egy félperióduson keresztül (ameddig a sebesség irányt nem változtat) az oszcillátorra állandó külső erő hat. Ha az előző kezdeti feltételekkel indulunk, akkor

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{m\omega_0^2}\right) \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{m\omega_0^2},$$

$$\dot{x}(t) = -\left(x_0 - \frac{F_0}{m\omega_0^2}\right) \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Az x , \dot{x}/ω_0 fázisgörbe most $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$ középpontú, $x_0 - \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ su-

garú kör. $t = \frac{\pi}{\omega_0}$ -ban a sebesség iránya megfordul; ezért

ezután

$$x(t) = -\left(x_0 - \frac{3F_0}{m\omega_0^2}\right) \cos \omega_0 t - \frac{F_0}{m\omega_0^2};$$

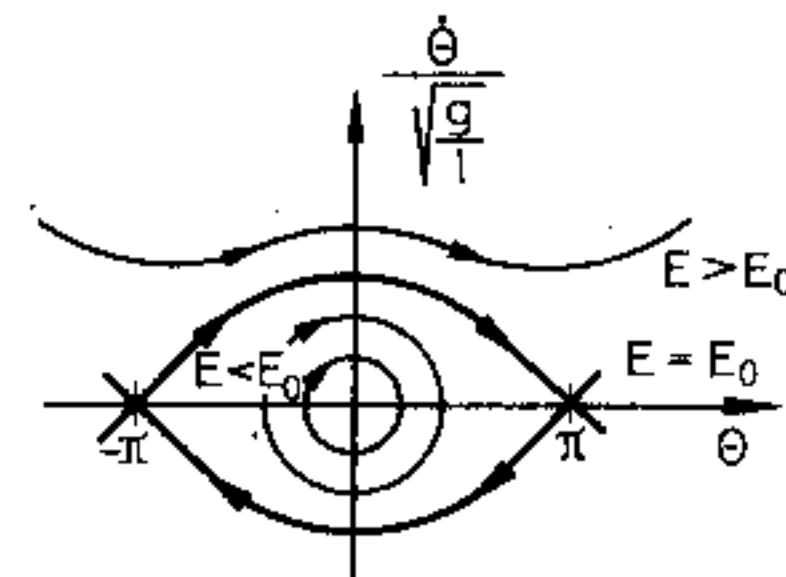
$$\dot{x}(t) = \omega_0 \left(x_0 - \frac{3F_0}{m\omega_0^2}\right) \sin \omega_0 t;$$

a fázisgörbe $-\frac{F_0}{m\omega_0^2}$ középpontú, $x_0 - \frac{3F_0}{m\omega_0^2}$ sugarú kör.

10.38. Az inga mozgására fennáll az energiamegmaradás $E = T + V$. A legnagyobb kitérés Θ_0 szögével $E = 2mgl \sin^2(\Theta_0/2)$, és $T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\Theta}^2$, $V = 2mgl \sin^2(\Theta/2)$, így az energiamegmaradás:

$$\dot{\Theta} = \sqrt{\frac{g}{l} [\sin^2(\Theta_0/2) - \sin^2(\Theta/2)]}$$

alakban megadja a fázisgörbe $\dot{\Theta} = \dot{\Theta}(\Theta)$ egyenletét. Ha Θ_0 és Θ kicsik, akkor ez írható az $\frac{l}{g} \dot{\Theta}^2 + \Theta^2 \approx \Theta_0^2$ alakba is, azaz $\Theta=0$ körül a Θ , $\dot{\Theta}/\sqrt{g/l}$ fázisgörbék közelítőleg körök. A $-\pi < \Theta < \pi$, $E < 2mgl = E_0$ esetben a fázisgörbék megegyeznek a $V(\Theta) = mgl(1 - \cos \Theta)$ potenciálban kötött részecske fázisgörbéivel; ezért a fázisgörbék zártak. $E > E_0$ esetén a mozgás periodikus, de nem oszcilláló; ez az eset annak felel meg, hogy az inga felfüggesztési pontjai körül teljes fordulatokat végez. A fázisgörbék a $2\sqrt{(E-E_0)/E_0} < \dot{\Theta}/\sqrt{g/l} \leq 2\sqrt{E/E_0}$ határok között maradnak a $\dot{\Theta}/\sqrt{g/l}$ változóban, Θ -ban azonban nincsenek megszorítva. Ha $E = E_0$ ($\Theta_0 = \pi$), akkor a fázisgörbét a $\dot{\Theta} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}} \cos(\Theta/2)$ egyenlet adja, azonban ez a fázisgörbe nem ír le tényleges fizikai mozgást, mert az instabil egyensúlyi helyzeten halad keresztül.



10.39. A diszkrét rendszer mozgásegyenlete:

$$\ddot{x}_n - ka \frac{a}{m} \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{a} - \frac{x_n - x_{n-1}}{a} \right) \frac{1}{a} = 0. \quad (1)$$

Az $\frac{m}{a} = \frac{Nm}{Na}$ mennyiség az $a \rightarrow 0$ határesetben a rúd ρ sűrűségét

adja. Az a távolság relatív megváltozása $\frac{x_n - x_{n-1}}{a}$ arányos a

rá ható erővel: $F = ka \frac{x_n - x_{n-1}}{a}$, ezért az $a \rightarrow 0$ határátmenetben ka a rúd E Young-modulusába megy át. Ezért az (1) egyenlet a

$$\frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial \xi^2} = 0, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

hullámegyenletbe megy át. Az N függvényt tartalmazó közönséges differenciálegyenlet-rendszer helyett egy parciális differenciálegyenletet kapunk. Nagyon lényeges az a feltevés, hogy $a \rightarrow 0$ esetén $x_n(t)$ egy elegendően sima függvényhez konvergál. A diszkrét tömegpontokból álló rendszer olyan hullámok esetén viselkedik hasonlóan a folytonos rúdhoz, amelyeknek a hullámhossza sokkal nagyobb a tömegpontok távolságánál ($\lambda \gg a$).

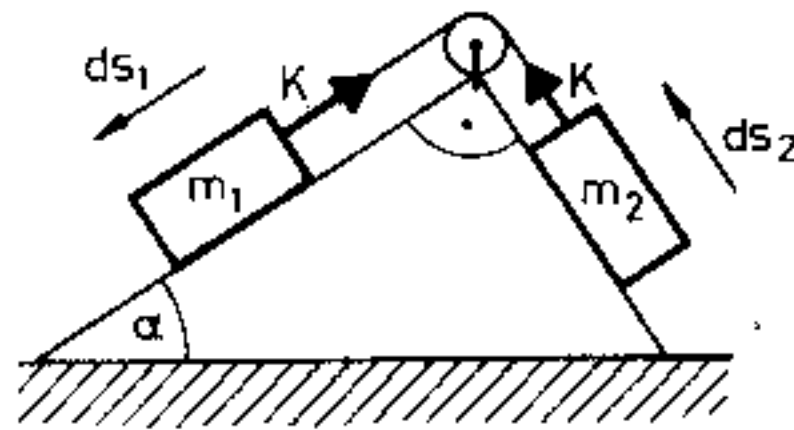
11. A mechanika elvei

11.1. Az egyensúly feltétele, hogy a szabad erők virtuális munkája 0 legyen:

$$-m_1 g \sin \alpha ds_1 + m_2 g \sin (90^\circ - \alpha) ds_2 = 0.$$

A kötélnyújthatatlansága miatt $ds_1 = ds_2$. Így az egyensúly feltétele $\tan \alpha = m_2/m_1$. Ebben a helyzetben a kötélerő

$$K = m_1 g \sin \alpha = m_2 g \sin (90^\circ - \alpha) = g \frac{m_1 m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}.$$



Ha $\tan \alpha \neq m_2/m_1$, akkor mindkét test gyorsuló mozgást végez. A kötélnyújthatatlansága miatt most $a_1 = a_2 = a$. A D'Alembert-elv szerint a mozgásegyenlet

$$(m_1 a - m_1 g \sin \alpha) ds_1 + (m_2 a + m_2 g \sin (90^\circ - \alpha)) ds_2 = 0.$$

Innen $a = g \frac{m_1 \sin \alpha - m_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2}$. A K kötélerőt megkaphatjuk az m_1 mozgásegyenletéből: $m_1 a = m_1 g \sin \alpha - K$, ahonnan $K = g \frac{m_1 m_2 (\cos \alpha + \sin \alpha)}{m_1 + m_2}$.

11.2.

$$\tan \varphi = \frac{m_1}{m_2 \sqrt{3}}; \quad K = \frac{\sqrt{3}}{2} g \frac{m_1 m_2}{\sqrt{m_1^2 + 3m_2^2}}$$

11.3. Egyensúlyban $\Delta \varphi$ szögű virtuális elmozdulás esetén a szabad erők virtuális munkája 0: $FR \Delta \varphi - mg \frac{1}{2} (R \Delta \varphi - r \Delta \varphi) = 0$. (A kötélnyújthatatlansága miatt $(R-r) \Delta \varphi$ megrövidülése esetén a teher – a két kötéldarab miatt $\frac{1}{2} (R-r) \Delta \varphi$ távolsággal kerül magasabbra). Innen $F = mg \frac{R-r}{2R}$. Ha $F \neq mg \frac{R-r}{2R}$, akkor a hengerkerék forgó, a teher gyorsuló mozgást végez. Ha a kötélerő K (ez a kötélnyújthatatlansága miatt mindig ugyanaz!), akkor a mozgásegyenletek:

$$\Theta \ddot{\varphi} = FR - K(R-r); \quad ma = mg - 2K.$$

A hengeren a kötélnyújthatatlansága miatt $\frac{1}{2} (R-r) \ddot{\varphi} = a$.

11.4.

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{m}{M}$$

11.5. Az $f \equiv 0$ felületen történő mozgás során fellépő kényszererő ha nincs súrlódás mindig a felület normálisának irányába

mutat. Így a mozgásegyenlet:

$$m\ddot{r} = mg + \lambda \text{grad } f = mg + \mathbf{K}. \quad (1)$$

Esetünkben a kényszererő minden pontban radiálisan a vályú tengelye felé mutat. Így (1) radiális komponense:

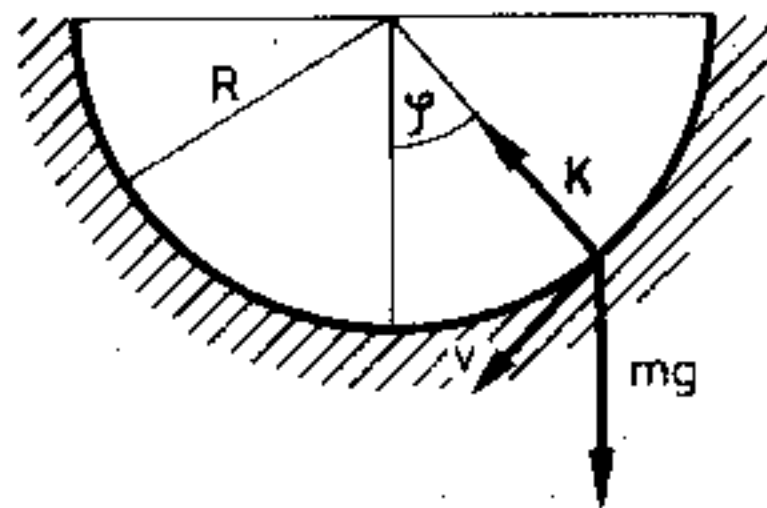
$$m \frac{v^2}{R} = -mg \cos \varphi + K. \quad (2)$$

Itt K a kényszererő nagysága, v pedig a test sebességének abszolút értéke a φ koordinátájú pontban. (2)-ből $K = m \left(\frac{v^2}{R} + g \cos \varphi \right)$. Minthogy nincs súrlódás, fennáll az energiamegmaradás:

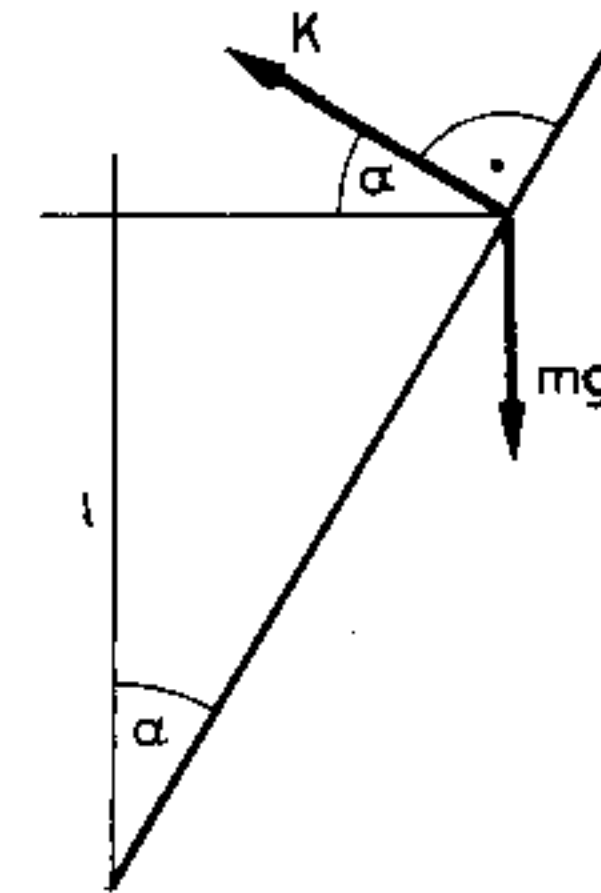
$$\frac{1}{2} mv^2 - mgR \cos \varphi = \frac{1}{2} mv_0^2 - mgR \cos \varphi_0 = E_0.$$

Így $K = \frac{2E_0}{R} + 3mg \cos \varphi$. A vályú alján $\varphi = 0$, ezért itt

$$K = \frac{2E_0}{R} + 3mg.$$

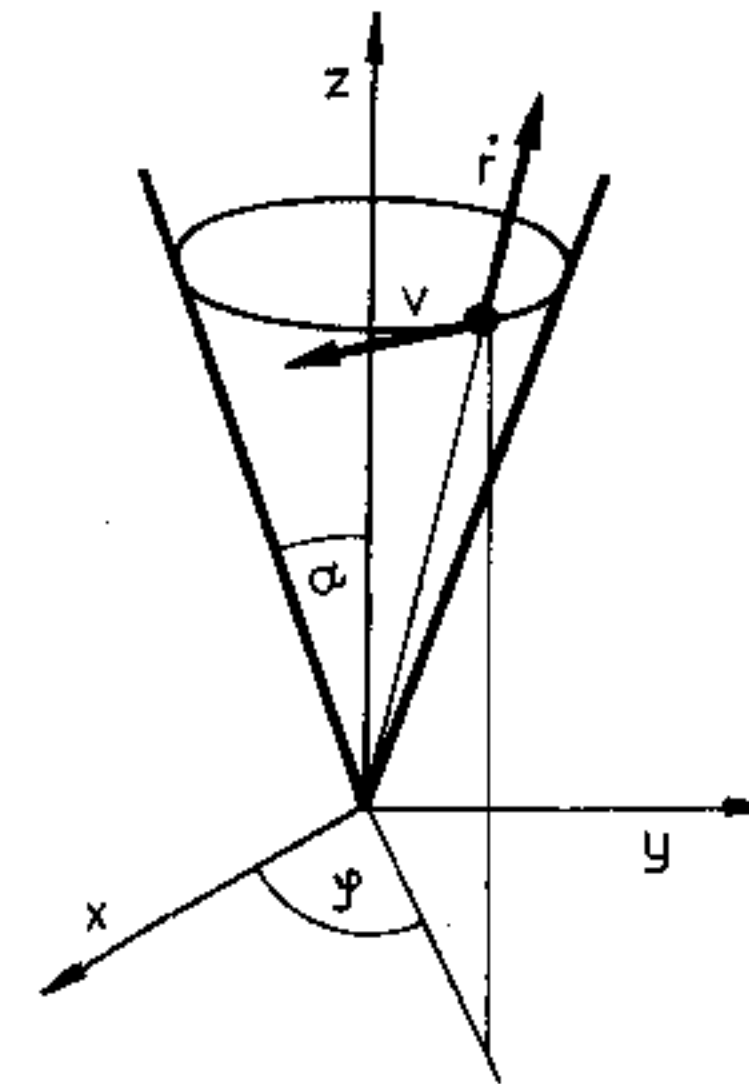


11.6. Az egyenletes körmozgás feltételei: függőleges irányban nincs gyorsulás: $mg = K \sin \alpha$; vízszintes irányban $m \frac{v_0^2}{l \operatorname{tg} \alpha} = K \cos \alpha$. E két egyenletből $v_0 = \sqrt{gl}$. Ha ez teljesül, $K = \frac{mg}{\sin \alpha}$.



11.7. A tömegközéppontnak a kúp alkotójára merőleges sebességkomponense legyen v , az alkotó irányú komponens \dot{r} . Fennáll az energiamegmaradás (az erőter konzervatív és az elmozdulás merőleges a kényszererőre):

$$E = mgl + \frac{1}{2} mv_0^2 = mgr \cos \alpha + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} m\dot{r}^2;$$



valamint az impulzusmomentum z komponenseinek megmaradása (az erők hatásvonalja metszi a z-tengelyt, φ ciklikus koordináta):

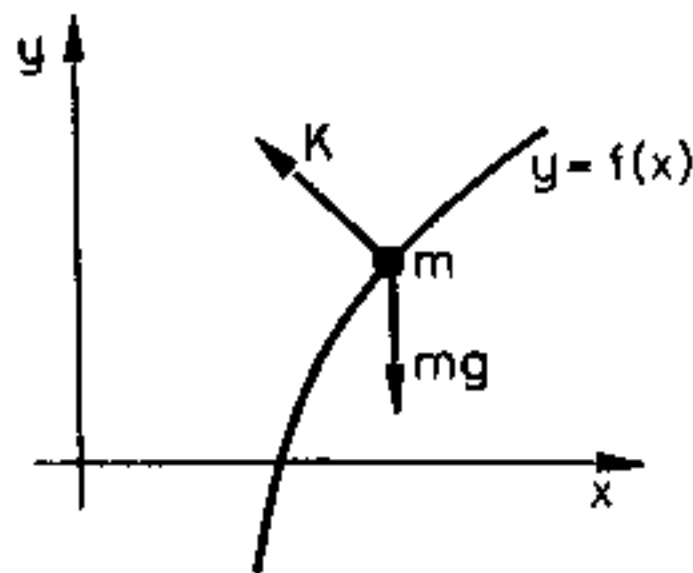
$$L_z / \sin \alpha = mlv_0 / \cos \alpha = mrv.$$

A két egyenletből

$$\dot{r} = \sqrt{2(l - r \cos \alpha)g + v_0^2 \left(1 - \frac{l^2}{r^2 \cos^2 \alpha}\right)}.$$

A pálya legmélyebb és legmagasabb pontjaiban $\dot{r} = 0$, azaz $\dot{r} \left(r = \frac{l}{2 \cos \alpha} \right) = 0$. Ennek megoldásából $v_0 = \sqrt{\frac{lg}{3}}$.

- 11.8.** A kényszererő $\mathbf{K} = \lambda \text{grad } F$; $F(x, y) = y - f(x) = 0$. Így: $\mathbf{K} = \lambda(-f'(x), 1)$. A mozgásegyenlet függőleges és vízszintes komponensei: $\lambda = mg$, $-m \frac{v_0^2}{x} = -\lambda f'(x)$. Innen $f'(x) = \frac{v_0^2}{g} \frac{1}{x}$; ennek megoldása adja a pohár alakját: $f(x) = \frac{v_0^2}{g} \ln \frac{x}{x_0}$.



- 11.9.** A Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenletek: $m\ddot{x} = -\lambda 2ax$, $m\ddot{y} = -mg + \lambda$. A sísánc $y - ax^2 = 0$ egyenletét kétszer differenciálva az idő szerint, $\ddot{y} - 2a\dot{x}^2 - 2ax\ddot{x} = 0$. Ezt felhasználva, a mozgásegyenletekből $\lambda = m(g + 2a\dot{x}^2)/(1 + 4a^2x^2)$. Az energiamegmaradásból $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2g(h - y) = 2g(h - ax^2)$; ha itt felhasználjuk az $\dot{y} = 2ax\dot{x}$ egyenletet, akkor $\dot{x}^2 = 2g(h - ax^2)/(1 + 4a^2x^2)$. Ezt λ kifejezésébe helyettesítve kap-

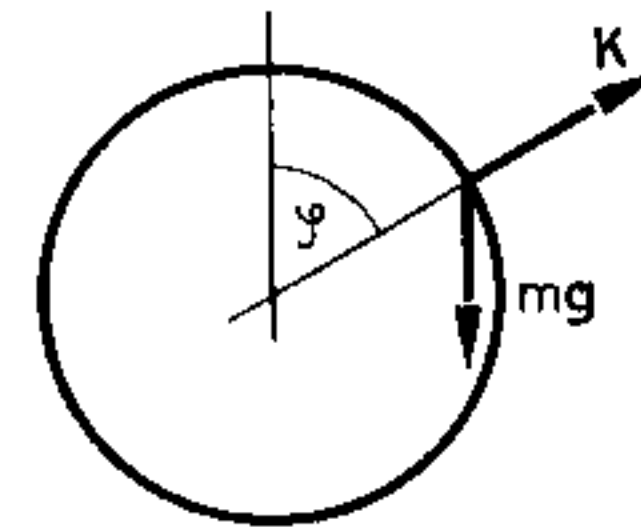
juk, hogy $\lambda = mg \frac{1 + 4ah}{(1 + 4a^2x^2)^2}$. A kényszererő $\mathbf{K} = \lambda(-2ax, 1)$, így nagysága

$$K = |\mathbf{K}| = mg \frac{1 + 4ah}{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}}.$$

- 11.10.** A 11.5. feladat megoldásának (2) egyenletére vezető gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$m \frac{v^2}{R} = mg \cos \varphi - K.$$

(Vegyük figyelembe, hogy most a gömb *külső* felületén zajlik a mozgás!) Innen – az energiamegmaradást kihasználva – $K = mg(3 \cos \varphi - 2)$. K – természeténél fogva – csak pozitív lehet (a gömbfelület csak „tartani” tud, „húzni” nem), így a $3 \cos \varphi_0 - 2 = 0$ pontban ($y_0 = \frac{2}{3}R$ magasságban) fog a test a gömbtől elválni.



- 11.11.** A leválás y magasságára az előző feladat megmondásait alkalmazva kapjuk, hogy

$$2 - 3z + z^3 \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = 0, \quad z = \frac{y}{b}.$$

Ha $z = \frac{1}{2}$, akkor $\frac{a}{b} = \sqrt{5}$.

11.12. Az elválási pont y koordinátájára az

$$y = \frac{2(y_0 - y)}{1 + y^2/p^2}$$

harmadfokú egyenletet kapjuk.

11.13. Vegyük észre, hogy a v_0 vízszintes sebességgel elhajított test

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 \text{ parabolán mozog. Ezért ha } \frac{g}{2v_0^2} < a, \text{ azaz ha}$$

$\frac{g}{2a} < v_0^2$, akkor a test sehol sem fog a parabolával érintkezni.

Ha $v_0^2 \leq \frac{g}{2a}$, akkor az előző feladatok megfontolásai szerint

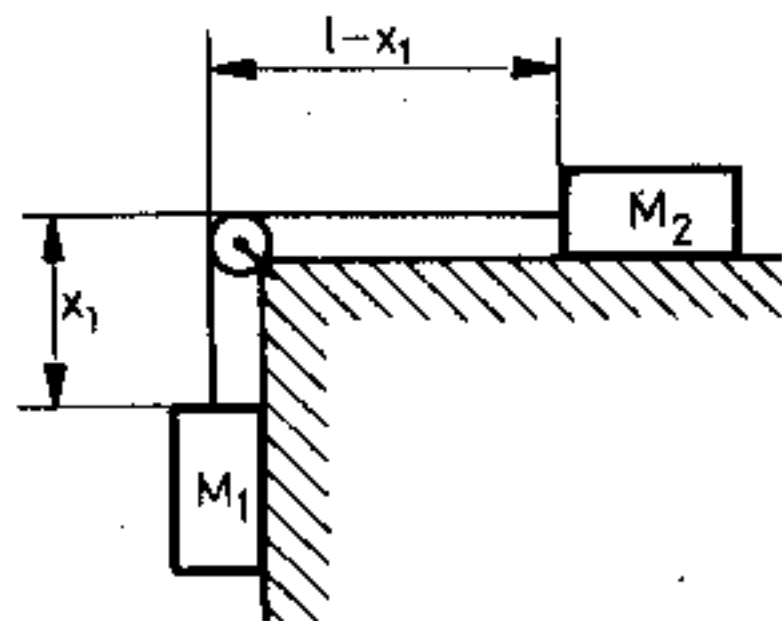
beláthatjuk, hogy sehol sem fog a test a parabolától elválni.

11.14. $y = \frac{2}{3}R + \frac{v_0^2}{3g}$ magasságban, ha $\frac{v_0^2}{g} < R$; ellenkező esetben csak induláskor érintkeznek.

11.15. A Lagrange-függvény a mozgási és potenciális energia különbsége: $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx$. A mozgásegyenlet $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$,

azaz $m\ddot{x} = -mg$. A Lagrange-függvény nem függ expliciten az időtől, tehát a teljes energia megmarad.

11.16. Válasszuk koordinátának (x_1) a függőleges fonaldarab hosszát. Így a rendszer mozgási energiája $T = \frac{M_1 + M_2}{2} \dot{x}_1^2$; po-



tenciális energiája pedig $V = -M_1gx_1$. A Lagrange-függvény:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}_1^2 + M_1gx_1.$$

A mozgásegyenlet $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1}$; esetünkben az

$$\ddot{x}_1 = \frac{M_1g}{M_1 + M_2}$$

állandó gyorsulással mozog.

11.17. Legyen $m_1(m_2)$ felfüggesztéstől mért távolsága $x_1(x_2)$. A Lag-

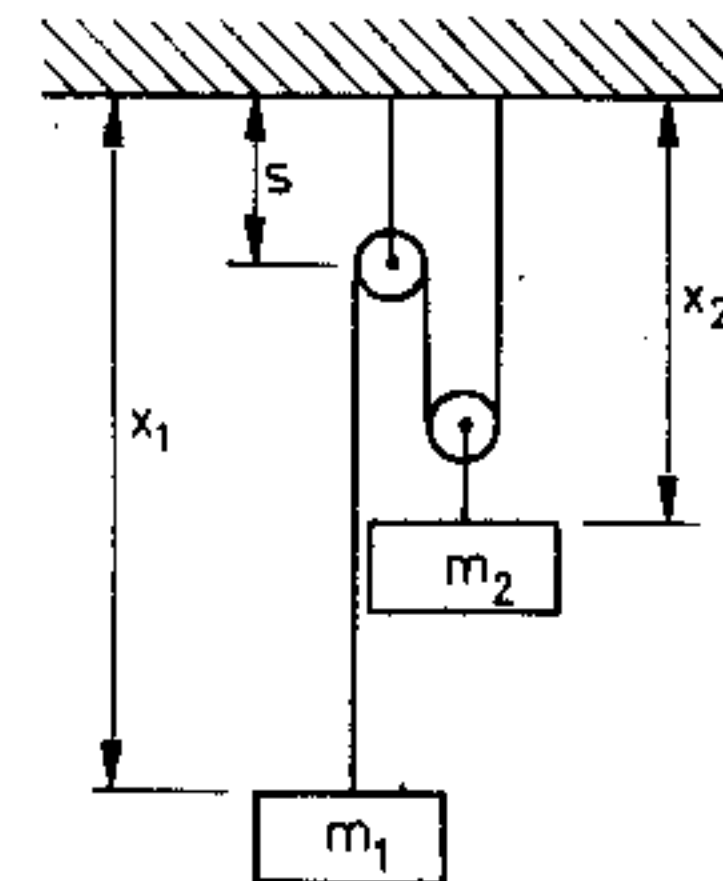
range-függvény: $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + m_1gx_1 + m_2gx_2$. x_1 és

x_2 nem függetlenek: $(x_1 - s) + (x_2 - s) + x_2 = l = c$ kötéll hossza. Innen $x_1 + 2x_2 = l_0 = \text{állandó}$. Így

$$L = \frac{4m_1 + m_2}{2} \dot{x}_2^2 + gx_2(m_2 - 2m_1).$$

A mozgásegyenlet $(4m_1 + m_2)\ddot{x}_2 = g(m_2 - 2m_1)$, azaz az állandó

gyorsulás nagysága $a_2 = \ddot{x}_2 = g \frac{m_2 - 2m_1}{m_2 + 4m_1}$.



11.18. A gravitációs potenciál $V(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{\alpha}{r}$ csak a tömegpont távolságának nagyságától függ, így a gravitációs erő

$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ radiális irányú. Ilyen erő hatására létrejövő mozgás során az impulzusmomentum $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ megmarad, azaz a mozgás a térben állandó \mathbf{J} vektorra merőleges síkban játszódik le. Ebben a síkban az r, φ polárkoordinátákat bevezetve, a mozgási energia $\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$, és így a Lagrange-függvény: $L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r}$.

L nem függ a φ koordinátától (φ ciklikus változó), ezért $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$ megmaradó mennyiség. ($m r^2 \dot{\varphi}$ megegyezik a \mathbf{J} impulzusmomentum nagyságával.)

11.19. a) Válasszuk koordinátáknak a gömbinga φ azimut- és ϑ polárszögét:

$$x = l \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = l \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z = l(\cos \vartheta - 1).$$

A Lagrange-függvény:

$$L = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - mgl \cos \vartheta.$$

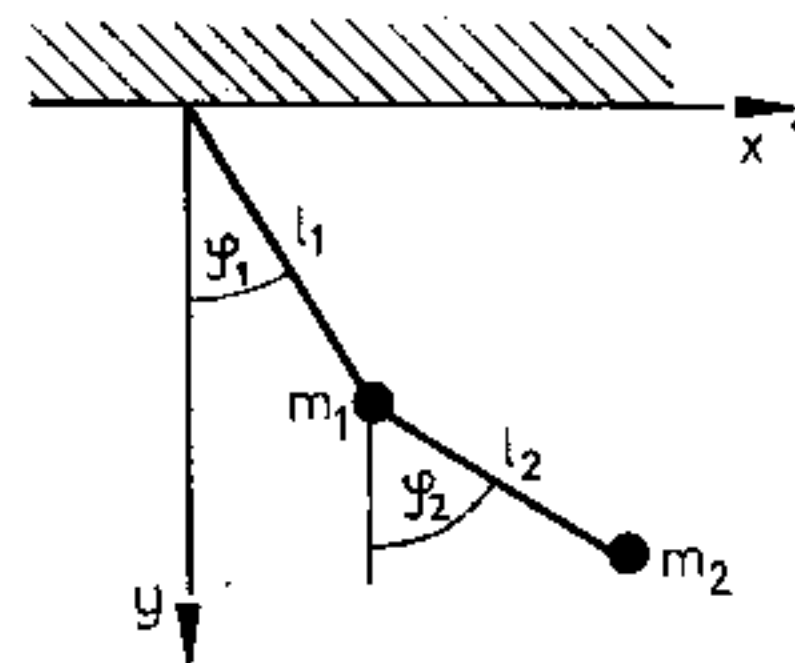
A φ nem szerepel L -ben, ezért φ ciklikus változó; $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}$ megmarad.

b) Válasszuk koordinátáknak a φ_1 és φ_2 szögeket. A testek helyzete:

$$x_1 = l_1 \sin \varphi_1, \quad y_1 = l_1 \cos \varphi_1, \\ x_2 = l_2 \sin \varphi_2 + x_1, \quad y_2 = l_2 \cos \varphi_2 + y_1.$$

Innen

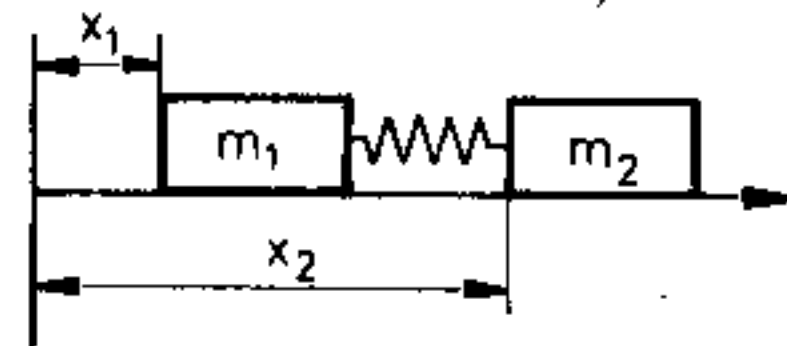
$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2.$$



c) Válasszuk koordinátáknak x_1 -et és x_2 -t! A potenciális energia $\frac{1}{2} k(x_1 - x_2)^2$, így $L = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k}{2} (x_1 - x_2)^2$. Vegyük észre, hogy a potenciális energia csak $x_1 - x_2 = y$ -től függ. Vezessük be új változónak y -t és a rendszer tömegközéppontját: $X = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1 + m_2)$. Így

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{X}^2 + \frac{m_2 m_1}{2(m_1 + m_2)} \dot{y}^2 - \frac{k}{2} y^2.$$

X ciklikus változó; $\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = (m_1 + m_2) \dot{X}$, a rendszer teljes impulzusa megmarad.

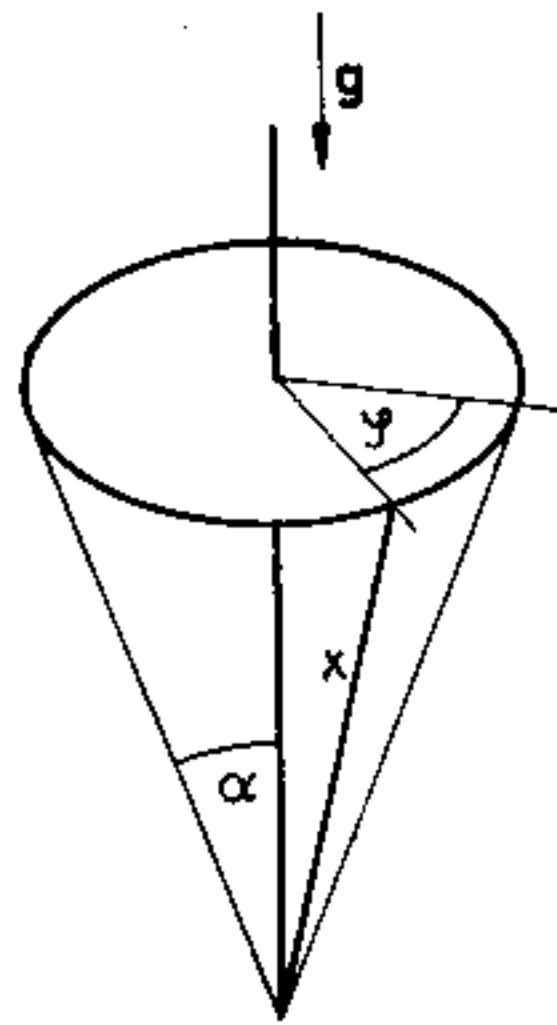


11.20. A Lagrange-függvény:

$$L = \frac{m}{2} (x^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2) - mgx \cos \alpha. \quad \checkmark$$

L nem függ az időtől, ezért az energia $E = \frac{m}{2} (x^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2) + mgx \cos \alpha$

$+ \dot{x}^2) + mgx \cos \alpha$ megmarad. L nem függ φ -től, ezért $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mx^2 \dot{\varphi} \sin^2 \alpha = J_z$ (az impulzuszórányú komponense) is megmarad. φ -ot innen kifejezve és E kifejezésébe helyettesítve, az alkotóirányú mozgás legegyszerűbb leírását kapjuk: $E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{J_z^2}{2mx^2 \sin^2 \alpha} + mgx \cos \alpha$. A mozgás akkor lesz stacionárius, ha $\dot{x} \equiv 0$; ez akkor teljesül, ha a két integrációs állandó (E, J_z) között teljesül az $E = V_{\text{eff}}^{\text{min}}$ egyenlőség. Itt $V_{\text{eff}}(x) = \frac{J_z^2}{2mx^2 \sin^2 \alpha} + mgx \cos \alpha$, és $V_{\text{eff}}^{\text{min}}$ a $V_{\text{eff}}(x)$ minimumhelyen felvett értékét jelöli.



11.21. A Lagrange-függvény: $L = \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{k}{2} z^2 - mgz$.

A mozgásegyenletek: $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta} = J = mRv = \text{állandó}$, és

$\ddot{z} = -\frac{k}{m} z - g$. A két egyenlet egymástól függetlenül integrálható:

$$\Theta(t) = \frac{v}{R} t + \Theta_0, \quad z(t) = -\frac{mg}{k} + \left(z_0 + \frac{mg}{k} \right) \cos t \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Tehát a test z irányban harmonikus rezgőmozgást, vízszintesen pedig egyenletes körmozgást végez.

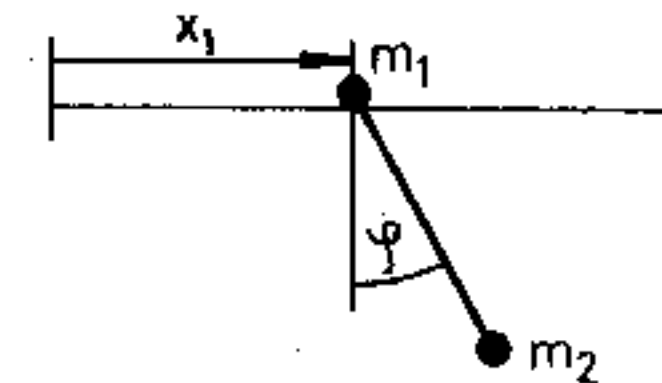
11.22. Válasszuk koordinátáknak az m_1 pont x_1 koordinátáját és a fonal függőlegessel bezárt φ szögét. Ekkor

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 g l \cos \varphi.$$

L nem függ expliciten x_1 -től, ezért $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi \equiv P_x$ (a rendszer vízszintes irányú teljes impulzusa) megmarad. Ez egyúttal az egyik mozgásegyenlet is. A φ -re vonatkozó mozgásegyenlet: $l\ddot{\varphi} + \dot{x} \cos \varphi = -g \sin \varphi$. Az \dot{x} -ot a $\dot{P}_x = 0$ egyenletből helyettesítve, φ -re végül

$$l\ddot{\varphi} \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \varphi \right) + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi = -g \sin \varphi.$$

Ennek $\varphi \equiv 0$ megoldása adja az egyensúlyi helyzetet. $\varphi \equiv 0$ körül linearizálva az egyenletet, $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \varphi = 0$ adódik, tehát a kis rezgések frekvenciája: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1}}$.



11.23. Ha $x_1(t)$ adott függvény, akkor az előző feladat Lagrange-függvényéből az első tagot – mint teljes időderiváltat – el lehet hagyni, és így a maradék egyetlen koordinátára (φ -re) a Lag-

range-függvény: $L = \frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi) + m_2 g l \cos \varphi$. A φ mozgásegyenlete megegyezik az előző feladatbeli $l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi - \ddot{x}_1 \cos \varphi$ egyenlettel. Minthogy \dot{x}_1 -on keresztül L expliciten függ az időtől, m_2 mozgására nem áll fenn az energiamegmaradás, azaz az energiának megfelelő $\frac{m_2}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi) - m_2 g l \cos \varphi$ kifejezés nem mozgásállandó.

11.24. A rúd függőlegessel bezárt φ szögét választva koordinátának, a rendszer Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\varphi}^2 - g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos \varphi.$$

Innen a mozgásegyenlet:

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\varphi} = g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \sin \varphi.$$

Ennek $\varphi_0 \equiv 0$, ill. $\varphi_0 \equiv \pi$ megoldásai adják a lehetséges egyensúlyi helyzeteket. A két lehetőség közül az a stabil, amely körüli kis rezgések korlátosak maradnak. A kis rezgések egyenletei:

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\varphi} = \begin{cases} g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \varphi, & \text{ha } \varphi_0 \equiv 0, \\ g(m_1 l_1 - m_2 l_2) (-\varphi), & \text{ha } \varphi_0 \equiv \pi. \end{cases}$$

A korlátosság akkor teljesül, ha ezen egyenleteknek sinusos (cosinusos) megoldásai vannak (és nem exponenciálisak); ennek feltétele $\varphi_0 \equiv 0$ esetén $m_2 l_2 - m_1 l_1 > 0$; $\varphi_0 \equiv \pi$ esetén $m_1 l_1 - m_2 l_2 > 0$. Tehát, ha $m_2 l_2 - m_1 l_1 > 0$, akkor $\varphi_0 \equiv 0$; ha $m_1 l_1 - m_2 l_2 > 0$, akkor a $\varphi_0 \equiv \pi$ egyensúlyi helyzet a stabil.

11.25. Az inga l hosszát és a függőlegessel bezárt φ szögét választva paraméternek, a rendszer Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2) + m g l \cos \varphi - \frac{1}{2} k l^2 + k l l_0.$$

A mozgásegyenletek:

$$\ddot{l} = g \cos \varphi - \frac{k}{m} (l - l_0), \quad (1)$$

$$l \ddot{\varphi} + 2 \dot{l} \dot{\varphi} = -g \sin \varphi. \quad (2)$$

Ennek $\varphi \equiv 0$; $l_1 \equiv \frac{m g}{k} + l_0$ megoldása adja az egyensúlyi helyzetet. A kis rezgések egyenletét (1) és (2) linearizálásával kapjuk:

$$\ddot{l} = -\frac{k}{m} l, \quad l_1 \ddot{\varphi} = -g \varphi.$$

Ez azt jelenti, hogy a függőleges rezgések frekvenciája

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a vízszinteseké pedig

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l_0 + \frac{m g}{k}}}.$$

11.26. $L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi) + m g l \cos \varphi - \frac{1}{2} k x_1^2$.

Itt x_1 a felfüggesztési pontnak a rugó rögzített végétől mért távolsága, φ pedig az inga függőlegessel bezárt szöge.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{l}{g} + \frac{m}{k}}}.$$

11.27. $L = \frac{m}{2} \dot{\varphi}^2 (l - R \varphi)^2 + m g \{ (l - R \varphi) \sin \varphi - R \cos \varphi \}$.

Itt φ az a szög, amit a fonal és a korong elválási pontját a korong középpontjával összekötő egyenes a függőlegessel bezár. A mozgásegyenlet:

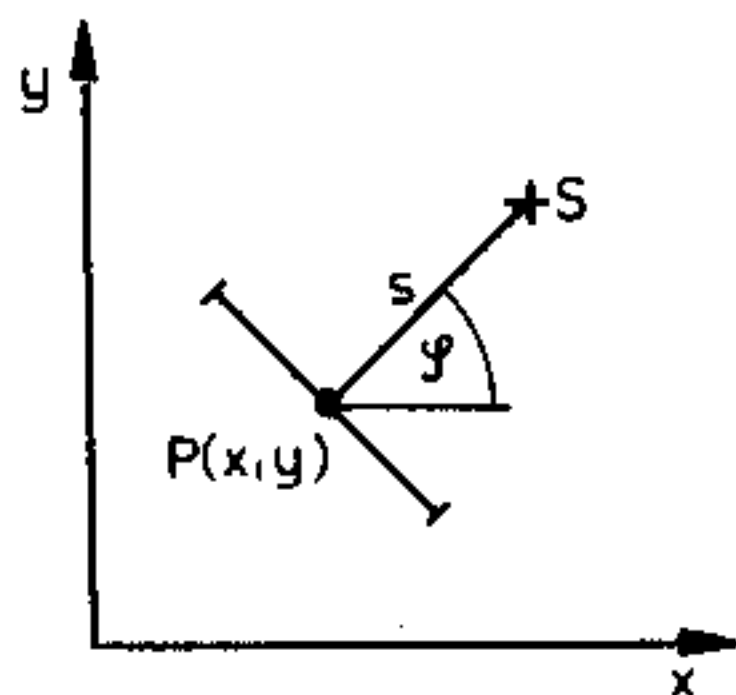
$$\ddot{\varphi} (l - R \varphi) - R \dot{\varphi}^2 = g \cos \varphi.$$

Az egyensúlyi helyzet $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. A kis rezgések frekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l - R \frac{\pi}{2}}}.$$

11.28. $L = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\vartheta}^2 + \omega^2 \sin^2 \vartheta) + mgR \cos \vartheta$ (ϑ a függőlegessel bezárt szög). Ha $R\omega^2 < g$, akkor az egyensúlyi helyzetek $\vartheta = 0$ és $\vartheta = \pi$ (az első stabil, a második instabil). Ha $R\omega^2 > g$, akkor a stabil egyensúlyi helyzet $\vartheta = \vartheta_0$ -nál van $\left(\cos \vartheta_0 = \frac{g}{R\omega^2}\right)$, és a $\vartheta = 0$ is instabillá válik.

11.29. A rendszert a tengely P felezőpontjának x, y koordinátaival és az SP szakasz φ szögével jellemezzük. A Lagrange-függvény: $L = \frac{m}{2} [(\dot{x} - s\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + s\dot{\varphi} \cos \varphi)^2] + \frac{1}{2} \Theta \dot{\varphi}^2$. Ehhez járul a $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$ anhalonon mellékfeltétel; ezt írjuk a $dy \cos \varphi - dx \sin \varphi = 0$ alakba!



A mozgásegyenletek:

$$\frac{d}{dt} m(\dot{x} - s\dot{\varphi} \sin \varphi) + \lambda \sin \varphi = 0,$$

$$\frac{d}{dt} m(\dot{y} + s\dot{\varphi} \cos \varphi) - \lambda \cos \varphi = 0,$$

$$\frac{d}{dt} (ms^2 \dot{\varphi} + \Theta \dot{\varphi}) + ms\dot{\varphi}(\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi) = 0.$$

Vezessük be továbbá \dot{x} és \dot{y} helyett a P pont sebességét független változónak az $u = \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi$ definícióval; ekkor a

mozgásegyenletek az

$$(ms^2 + \Theta)\dot{\varphi} + ms\dot{\varphi}u = 0; \quad \dot{u} - s\dot{\varphi}^2 = 0$$

alakba írhatók. Bevezetve az $1 + \frac{\Theta}{ms^2} = k^2$ és a $\dot{\varphi} = \omega$ jelöléseket, a

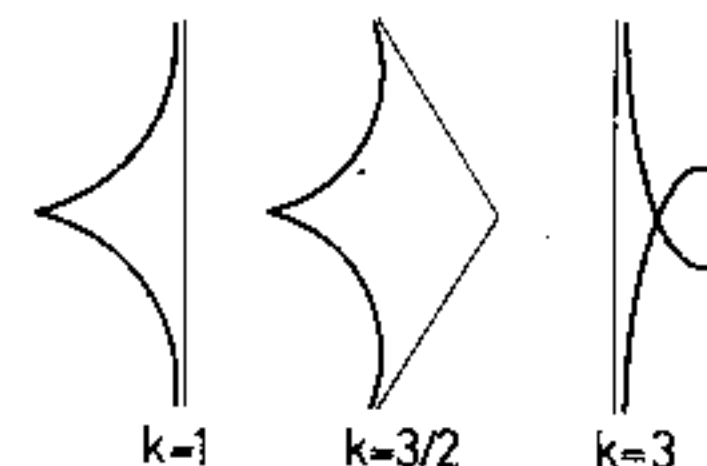
$$k^2 s \dot{\omega} + u \omega = 0, \quad (2)$$

$$\dot{u} = s \omega^2 \quad (3)$$

egyenleteket kapjuk. u -t (2)-ből kifejezve és (3)-ba helyettesítve $k^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega} \right) = -\omega^2$ adódik. Ez $\frac{\dot{\omega}}{\omega}$ -val való szorzás után integrálható; innen $k\dot{\omega} = \omega \sqrt{k^2 c^2 - \omega^2}$. Az $\omega(t) = kc \cos \psi(t)$ jelöléssel a ψ -re adódó differenciálegyenlet: $\dot{\psi} = c \cos \psi$. Ennek megoldása:

$$ct = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}. \quad (4)$$

Ez az implicit egyenlet meghatározza $\psi(t)$ -t; ebből $\omega(t)$, majd (2)-ből $u(t)$, illetve $\varphi(t)$ is meghatározható. $t \rightarrow \pm \infty$ esetén (4)-ből látszik, hogy $\psi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$, és így $\varphi(\pm \infty) = \pm k \frac{\pi}{2}$. A k értékétől függően a mozgás jellegére az ábrán látható pályák utalnak.



11.30. Az oszcillátor Lagrange-függvénye: $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2$.

A kanonikus impulzus $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, innen $\dot{x} = \frac{p}{m}$, és ezért a

Hamilton-függvény $H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2$. A kanonikus

egyenletek: $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$; $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$.

11.31. A rendszer Lagrange-függvényét a 11.16. feladatban már meghatároztuk: $L = \frac{M_1 + M_2}{2}\dot{x}^2 + M_1gx$. Innen a Hamilton-függvény: $H = \frac{p^2}{2(M_1 + M_2)} - M_1gx$.

A kanonikus egyenletek:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{M_1 + M_2}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -M_1g.$$

A másodikat integrálva: $p(t) = M_1gt + p_0$; az elsőből:

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{M_1gt^2}{M_1 + M_2} + \frac{p_0t}{M_1 + M_2} + x_0. \text{ A mozgás tehát egyenle-$$

tesen gyorsuló, $\frac{M_1}{M_2 + M_1}g$ gyorsulással.

11.32.

$$H = \frac{p^2}{2(4m_1 + m_2)} - (m_2 - 2m_1)gx; \quad \dot{x} = \frac{p}{4m_1 + m_2},$$

$$\dot{p} = (m_2 - 2m_1)g;$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}gt^2 + \frac{p_0}{m_2 + 4m_1}t + x_0;$$

$$p(t) = (m_2 - 2m_1)gt + p_0.$$

11.33. A Lagrange-függvény: $L = \frac{m}{2}(R^2\dot{\Theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}kz^2 - mgz$; A

kanonikus impulzusok: $p_\Theta = mR^2\dot{\Theta}$, $p_z = mz$. $H = \frac{p_\Theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2 + mgz$. A kanonikus egyenletek: $\dot{p}_\Theta = 0$,

$\dot{p}_z = -kz - mg$, $\dot{\Theta} = \frac{p_\Theta}{mR^2}$, $\dot{z} = \frac{p_z}{m}$. Az első és harmadik integ-

rálásból: $p_\Theta = p_\Theta^{(0)}$; $\Theta(t) = p_\Theta^{(0)}t/(mR^2) + \Theta_0$; a második és ne-

gyedik egyenletből pedig $\dot{z} = \frac{p_z}{m} = -\frac{k}{m}z - g$. Ennek megoldása:

$$z = -\frac{mg}{k} + \left(z_0 + \frac{mg}{k}\right) \cos t \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

$$\mathbf{11.34.} \quad H = \frac{p_\vartheta^2}{2mR^2} - mR^2 \left[\frac{\omega^2}{2} \sin^2 \vartheta + \omega_{kr}^2 \cos \vartheta \right]; \quad p_\vartheta = mR^2 \dot{\vartheta}.$$

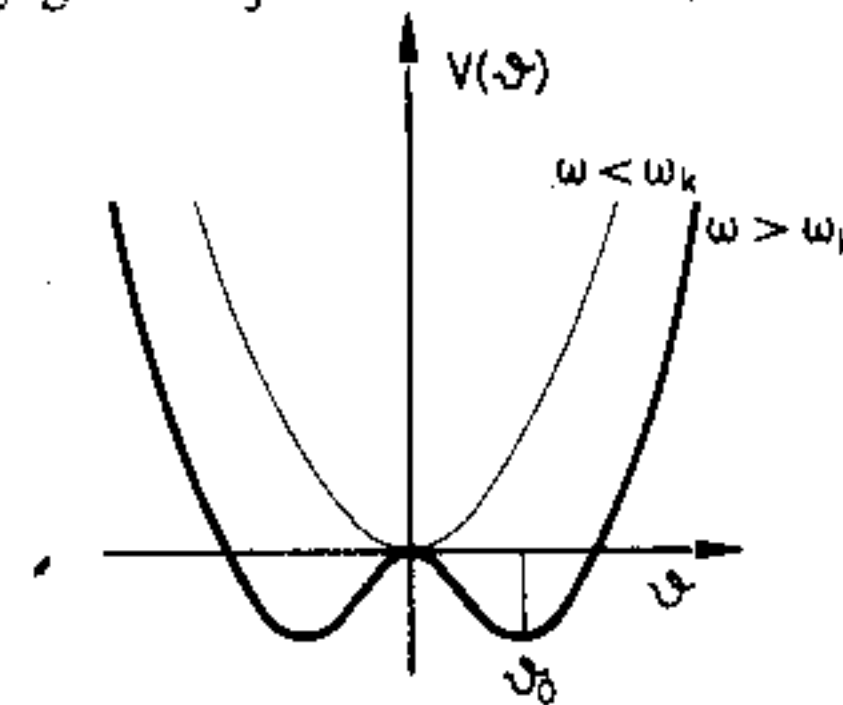
Az ω_{kr} szögsebesség körül a stacionárius ϑ érték mindenképpen kicsi (l. 10.26. feladat) ezért a potenciális energiát sorba fejthetjük ϑ szerint:

$$V(\vartheta) = mR^2 \left[-\omega_{kr}^2 + \frac{1}{2}(\omega_{kr}^2 - \omega^2)\vartheta^2 + \left(\frac{\omega^2}{6} - \frac{\omega_{kr}^2}{24}\right)\vartheta^4 + O(\vartheta^6) \right].$$

Amíg $\omega < \omega_{kr}$, a másodfokú tag pozitív, így a stacionárius megoldás a $\vartheta = 0$ érték. Ha azonban $\omega > \omega_{kr}$, akkor ezen tag előjele megváltozik, a függvény menete hasonló a 8.8. feladatban látotéhoz, és másik stacionárius megoldás lép föl, melyre

$$|\vartheta_0| = \frac{\omega_{kr}^2 - \omega^2}{4 \left(\frac{\omega^2}{6} - \frac{\omega_{kr}^2}{24} \right)} \approx 2(1 - \omega^2/\omega_{kr}^2),$$

összhangban a $\cos \vartheta_0 = \omega_{kr}^2/\omega^2$ általános eredménnyel. A $V(\vartheta)$ függvény grafikonja:



11.35. A gerjesztő erő leszarmaztatható a $V(x, t) = -Ax \sin \omega t$ potenciálból; így $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 + Ax \sin \omega t$. A kanonikus impulzus $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$; a Hamilton-függvény pedig

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2 - Ax \sin \omega t.$$

H idő szerinti deriváltja:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial t} = \dot{x} \dot{p} - \dot{p} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial t} = \\ &= -Ax\omega \cos \omega t \neq 0, \end{aligned}$$

így H nem mozgásállandó (a második egyenlőségénél a kanonikus egyenleteket használtuk). Levezetésünkből látszik, hogy H nem mozgásállandó minden olyan esetben, amikor expliciten függ az időtől (ha $\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0$).

11.36. L -et az Euler-Lagrange-egyenletekbe helyettesítve, valóban a csillapított oszcillátor mozgásegyenletét kapjuk. A kanonikus impulzus:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{\frac{\alpha}{m}t} \left(\dot{x} + \frac{\alpha}{2m} x \right).$$

Így

$$H = p\dot{x} - L = \frac{1}{2} \left\{ p^2 e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{\alpha}{m} p x + \left(\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2} \right) x^2 e^{\frac{\alpha}{m}t} \right\}.$$

11.38. A kanonikus impulzus komponensei $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{e}{c} A_i$ (P_i nem azonos a mechanikai impulzussal, melynek komponensei $m\dot{x}_i$). A Hamilton-függvény:

$$H = \sum_{i=1}^3 P_i \dot{x}_i - L = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 \left(P_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2 + e\Phi.$$

11.39. I. megoldás

Az inga Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \mathbf{A}) - mgz,$$

ahol $\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r})$ a $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ z-irányú mágneses tér vektorpotenciálja. Kis kitérések esetében

$$z \approx \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{l}, \quad \dot{z} \approx \frac{x}{l} \dot{x} + \frac{y}{l} \dot{y}.$$

A négyzetes tagokat megtartva:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{eB}{2c} (x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1}{2} m \frac{g}{l} (x^2 + y^2).$$

Ebből a mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \omega_L \dot{y} + \omega_0^2 x &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_L \dot{x} + \omega_0^2 y &= 0, \end{aligned}$$

ahol

$$\omega_L = \frac{eB}{mc}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Bevezetve a $X = x + iy$ mennyiséget kapjuk, hogy

$$\ddot{X} + i\omega_L \dot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

Ennek általános megoldása:

$$X = e^{-i\frac{\omega_L}{2}t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}),$$

ahol

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\omega_L}{2} \right)^2}.$$

A zárójelben levő kifejezés két, egymásra merőleges rezgést ír le, így ennek általában ellipszispálya felel meg. Az $e^{-i\frac{\omega_L}{2}t}$ té-

nyező ezt az ellipszist $\omega_r/2$ szögsebességgel forgatja a z-tengely körül. Ha az ingát a mélypontról indítjuk v_0 sebességgel az x irányban, akkor a kezdeti feltételek szerint

$$X(0) = A + B = 0; \quad \dot{X}(0) = i\omega(A - B) = v_0.$$

Ebből

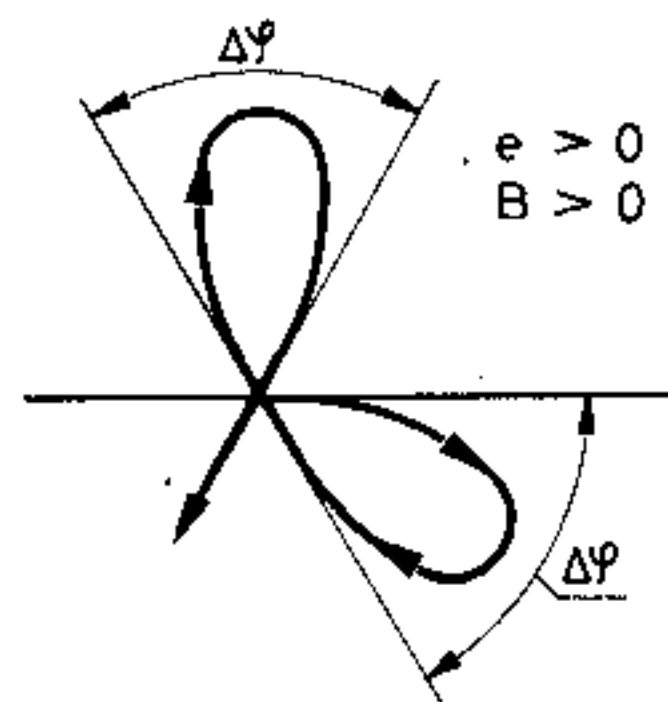
$$A = -B = \frac{v_0}{2i\omega},$$

és így

$$X = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t (\cos \omega_L t + i \sin \omega_L t).$$

Az $X = x + iy$ definíciónak megfelelően ez az ábrán látható pályának felel meg. Ez a mozgás az $\omega_L = 0$ esetben megvalósuló síklengésből a lengési sík $\omega_r/2$ szögsebességgel való forgatásával kapható meg (1. ábra). Az origóba való visszatérésig az elfordulás nagysága

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_L}{\omega}.$$



II. megoldás

Térjünk át egy

$$-\frac{\omega_L}{2}$$

szögsebességgel forgó koordináta-rendszerbe, ahol

$$\omega_L = \frac{e\mathbf{B}}{mc}.$$

A test sebessége a forgó koordináta-rendszerbeli \mathbf{v}' sebességgel a következő módon fejezhető ki:

$$\mathbf{v} = -\left(\frac{\omega_L}{2} \times \mathbf{r}\right) + \mathbf{v}'.$$

Ezt a Lagrange-függvénybe helyettesítjük:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{e}{2c} (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) - mgz = \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{\omega_L}{2} \times \mathbf{r}\right)^2 - mgz. \end{aligned}$$

A mágneses térnek és a Coriolis-erőnek megfelelő tagok kiejtik egymást, csak a centrifugális erő potenciálja marad meg. Kis kitérések esetén:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) - \frac{1}{2} m \left(\frac{g}{l} + \left(\frac{\omega_L}{2}\right)^2\right) (x'^2 + y'^2).$$

Ez az $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \left(\frac{\omega_L}{2}\right)^2}$ frekvenciájú síkbeli oszcillátor Lagrange-függvénye. A mozgás két, ω frekvenciájú, egymásra merőleges rezgés szuperpozíciója, a pálya általában ellipszis.

11.40.

$$\begin{aligned} \{p_i, x_j\} &= \delta_{ij}; & \{x_k, J_l\} &= \varepsilon_{klm} x_m; \\ \{p_i, J_l\} &= -\varepsilon_{ilm} p_m; & \{J_i, J_k\} &= -\varepsilon_{ikm} J_m. \end{aligned}$$

11.41. Fejtsük az f függvényt $t=0$ körül Taylor-sorba:

$$f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^n f}{dt^n}\right)_{t=0} \frac{t^n}{n!},$$

és használjuk fel, hogy minden $\psi(q(t), p(t))$ függvényre fennáll

(ha ψ nem függ expliciten az időtől) $\frac{d\psi}{dt} = \{H, \psi\}$; így

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \{H, \dots, \{H, f\}, \dots\};$$

evvel pedig állításunkat beláttuk.

Az állandó F erő hatására mozgó m tömegű test Hamilton-függvénye: $H = \frac{p^2}{2m} + \mathbf{F}\mathbf{x}$. $f(q, p) \equiv \mathbf{p}$ esetén $\{H, \mathbf{p}\} = \mathbf{F}$, és $\{H, \{H, \mathbf{p}\}\} = 0$, ezért $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) + \mathbf{F}t$.

$f(q, p) = \mathbf{x}$ esetén $\{H, \mathbf{x}\} = \frac{\mathbf{p}}{m}$, $\{H, \{H, \mathbf{x}\}\} = \frac{\mathbf{F}}{m}$; a többi

Poisson-zárójel pedig eltűnik, tehát $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \frac{\mathbf{p}}{m}t + \frac{\mathbf{F}}{2m}t^2$.

Természetesen ezeket a mennyiségeket egyszerűbb kiszámítani a Poisson-zárójel használata nélkül. Ezt a módszert azonban könnyű általánosítani a kvantummechanikai leírásra is.

11.42. A régi és új koordinátáktól függő alkotófüggvény esetén a kanonikus transzformáció általános összefüggései (Landau-Lifsic: Mechanika (45.7) képlet):

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Esetünkben $p = Q$, $P = -q$, tehát ez a transzformáció a koordináták és impulzusok kölcsönös átkeresztelése. Minthogy esetünkben $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, $H'(P, Q) = H(p(P, Q), q(P, Q)) = \frac{Q^2}{2m} + \frac{k}{2}P^2$.

11.43. a) $Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} = q_i$ és $p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = P_i$ miatt ez az identitástranszformáció.

b) $Q_i = c_i(t)q_i$, $p_i = c_i(t)P_i$; ez ponttranszformáció.

11.44. A 11.42. feladat megoldásának általános összefüggése szerint:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = qm\omega(t) \operatorname{ctg} Q, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{1}{2}m\omega(t) \frac{q^2}{\sin^2 Q}. \quad \text{Innen}$$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega(t)}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2Pm\omega(t)} \cos Q.$$

Az oszcillátor új Hamilton-függvénye:

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = P\omega(t) + \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} P \sin 2Q.$$

A kanonikus egyenletek:

$$\dot{Q} = \omega + \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} \sin 2Q; \quad \dot{P} = -\frac{\dot{\omega}}{\omega} P \cos 2Q.$$

Ha $\omega \equiv \omega_0$, akkor a megoldás: $P \equiv P_0$ (állandó), és $Q = \omega_0 t + Q_0$, azaz $q = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega_0}} \sin(\omega_0 t + Q_0)$.

11.45. A kanonikus transzformáció $x = P e^{-\frac{\alpha}{2m}t}$, $p = -X e^{\frac{\alpha}{2m}t}$. Az új Hamilton-függvény (a régét a 11.36. feladatban határoztuk meg):

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[X^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2} \right) P^2 \right].$$

Így az új kanonikus egyenletek: $\dot{P} = -X$ és $\dot{X} = \left(\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2} \right) P$. Ezek megoldása:

$$P = C e^{i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}t} + B e^{-i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}t},$$

$$X = i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}} \left[C e^{i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}t} - B e^{-i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}t} \right],$$

ahol C és B tetszőleges állandók.

11.46. Fejezzük ki az impulzusokat a régi és új koordináták segítségével:

$$p_x = -\frac{m\omega Y}{\sin \lambda} + \frac{m\omega \cos \lambda}{\sin \lambda} y, \quad p_y = -\frac{m\omega X}{\sin \lambda} + \frac{m\omega \cos \lambda}{\sin \lambda} x,$$

$$P_x = \frac{m\omega}{\sin \lambda} (y - Y \cos \lambda), \quad P_y = \frac{m\omega}{\sin \lambda} (x - X \cos \lambda).$$

Ha a transzformáció kanonikus, akkor létezik olyan $F(x, y, X, Y, t)$ alkotófüggvény, hogy az előző impulzusok rendre $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, -\frac{\partial F}{\partial X}, -\frac{\partial F}{\partial Y}$ deriváltaként állnak elő. Ebben az esetben a különböző vegyes másodrendű deriváltaknak (pl. $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x}$) meg kell egyezniük (ún. integrálhatósági feltételek); ezeket könnyen ellenőrizhetjük az impulzusok alkalmas deriváltjainak összehasonlításával. Ezért az egyenletrendszert valóban lehet integrálni:

$$F(x, X, y, Y, t) = -\frac{m\omega}{\sin \lambda} (yX + xY) + \frac{m\omega \cos \lambda}{\sin \lambda} (xy + XY).$$

Az új Hamilton-függvény: $H'(P, Q) = H(P, Q)$.

11.47. A Φ alkotófüggvénnyel leírt kanonikus transzformáció

$$p = P + 2axP, \quad Q = x + ax^2 + 3bP^2.$$

Feltételezve (és utólag majd ténylegesen igazolva), hogy Φ -ben az ax^2P és bP^3 tagok kicsik az elsőhöz képest, p -t és q -t a, b -ben elsőrendben fejezzük ki:

$$p = P + 2aQP, \quad x = Q - aQ^2 - 3bP^2.$$

Hasonló módon, az új Hamilton-függvényben

$$H'(P, Q) = \frac{P^2}{2} + \frac{\omega^2 Q^2}{2} + \alpha Q^3 + 2aQP^2 - (aQ^3 + 3bQP^2)\omega^2 + \\ + \beta QP^2 + \text{magasabb rendű tagok.}$$

Az $\alpha - a\omega^2 = 0, \beta + 2a - 3b\omega^2 = 0$ egyenletet kielégítő a, b esetén a harmadrendű tagok kiesnek. Ekkor – a negyedrendű tagokat elhanyagolva –

$$Q = A \cos \omega t, \quad P = -\omega A \sin \omega t$$

és

$$x = A \cos \omega t - \frac{\alpha}{\omega^2} A \cos^2 \omega t - \left(\beta + \frac{2\alpha}{\omega^2} \right) \frac{1}{\omega^2} \omega^2 A^2 \sin^2 \omega t.$$

11.48.

$$S = m \int_0^{t_0} \left(\frac{1}{2} \dot{y}^2 - gy \right) dt = \frac{m}{2} \left\{ y\dot{y} \Big|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} y\ddot{y} dt - 2g \int_0^{t_0} y dt \right\} = \\ = \frac{m}{2} \left\{ y\dot{y} \Big|_0^{t_0} - g \int_0^{t_0} y dt \right\}.$$

Itt az utolsó egyenlőség felírásakor kihasználtuk az $\ddot{y} = -g$ mozgásegyenletet. Az út-idő összefüggés: $y(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 + y_0$. A v_0 -t az $y(t_0) = y_1$ egyenletből kapjuk: $v_0 = \frac{1}{t_0} (y_1 - y_0) + \frac{g}{2} t_0$. S -be visszahelyettesítve, az integrálás elvégzése után kapjuk, hogy

$$S = \frac{m}{2} \left\{ \frac{(y_1 - y_0)^2}{t_0} - gt_0(y_1 + y_0) - \frac{g^2}{12} t_0^3 \right\}, \\ \frac{\partial S}{\partial t_0} = -\frac{m}{2} \left\{ \frac{(y_1 - y_0)^2}{t_0^2} + g(y_1 + y_0) + \frac{g^2}{4} t_0^2 \right\} = \\ = -\frac{m}{2} \left\{ \frac{(y_1 - y_0)^2}{t_0^2} + g(y_1 - y_0) + \frac{g^2}{4} t_0^2 + 2gy_0 \right\} = \\ = -\frac{m}{2} v_0^2 - mgy_0.$$

11.49. A szabadon eső test Hamilton-függvénye: $H(p, y) = \frac{p^2}{2m} +$

$+mgy$. A Hamilton-Jacobi-egyenletben p helyébe $\frac{\partial S}{\partial y_1}$ -et kell helyettesíteni:

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = m \left(\frac{y_1 - y_0}{t_0} - \frac{1}{2} gt_0 \right).$$

Így

$$H\left(y_1, \frac{\partial S}{\partial y_1}, t_0\right) = \frac{m}{2} \left\{ \frac{(y_1 - y_0)^2}{t_0^2} + g(y_1 + y_0) + \frac{g^2}{4} t_0^2 \right\},$$

és az előző feladat megoldása szerint ez valóban megegyezik a $-\frac{\partial S}{\partial t_0}$ mennyiséggel.

11.50.

$$S(x_0, x_1, \tau) = \frac{m\omega}{2 \sin \omega\tau} \{-2x_1x_0 + (x_0^2 + x_1^2) \cos \omega\tau\}.$$

11.52.

$$\delta S_0 = \delta S + \delta(tE) = p\delta q - E\delta t + E\delta t + t\delta E = p\delta q + t\delta E,$$

tehát S_0 valóban tekinthető q és E függvényének a $\frac{\partial S_0}{\partial q} = p$ és

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t \text{ deriváltakkal. Az oszcillátorra } H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = E,$$

ezért $p = -\frac{\partial S_0}{\partial x} = \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}$. Elvégezve az integrálást:

$$S_0 = \frac{1}{2}\sqrt{mk} \left\{ x \left(\frac{2E}{k} - x^2 \right)^{1/2} + \frac{2E}{k} \arcsin x \sqrt{\frac{k}{2E}} \right\}.$$

Elvégezve a differenciálást:

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t = \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin x \sqrt{\frac{k}{2E}}; \text{ ezt invertálva}$$

$$x = x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0)$$

megkapjuk a mozgás leírását.

11.53. A bolygómozgás Hamilton-függvénye:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r},$$

itt $p_\phi = J = \text{állandó}$. Az $S_0(p_r, J, E)$ függvényt a

$$p_r = \frac{\partial S_0}{\partial r} = \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{J^2}{r^2}}$$

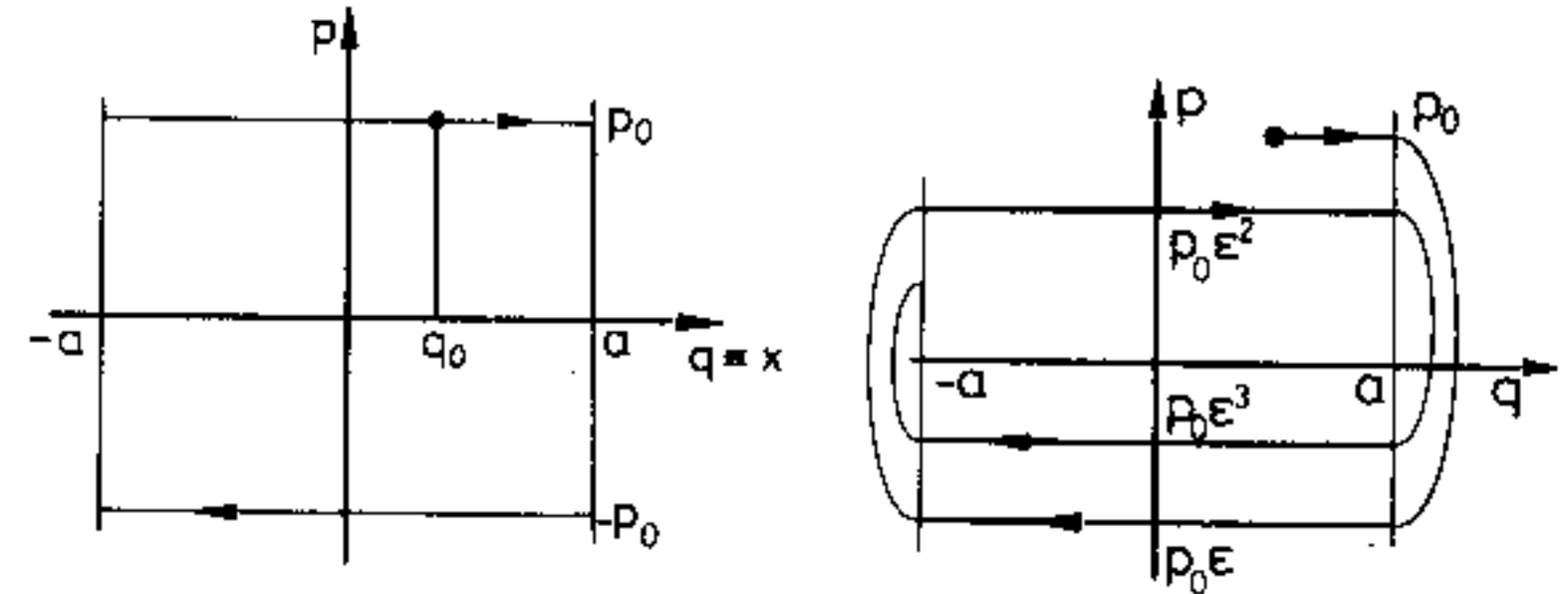
egyenlet integrálásával határozhatjuk meg. A pályát a

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{\partial S_0}{\partial J} = J \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - J^2/r^2}}$$

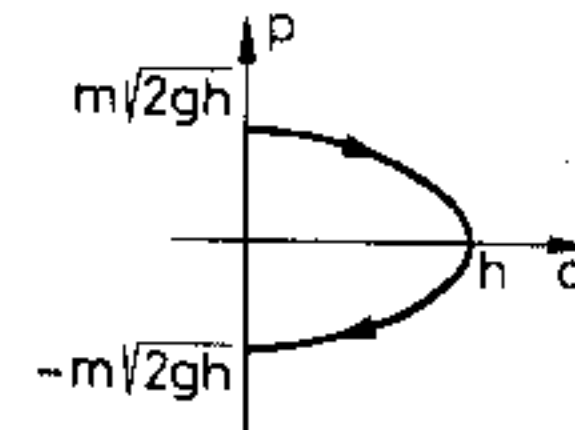
egyenletből számítjuk ki:

$$\varphi - \varphi_0 = \arcsin \frac{r - J^2/m\alpha}{er}; \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{m\alpha^2}}.$$

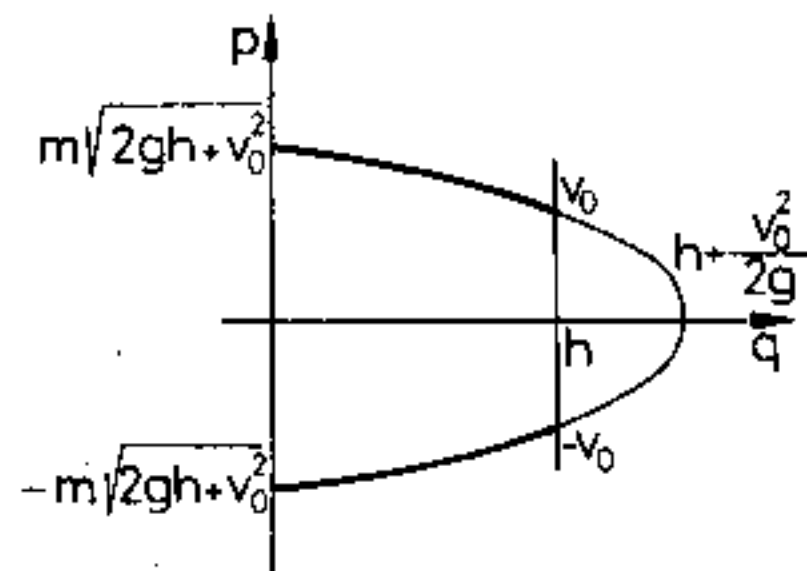
11.54.



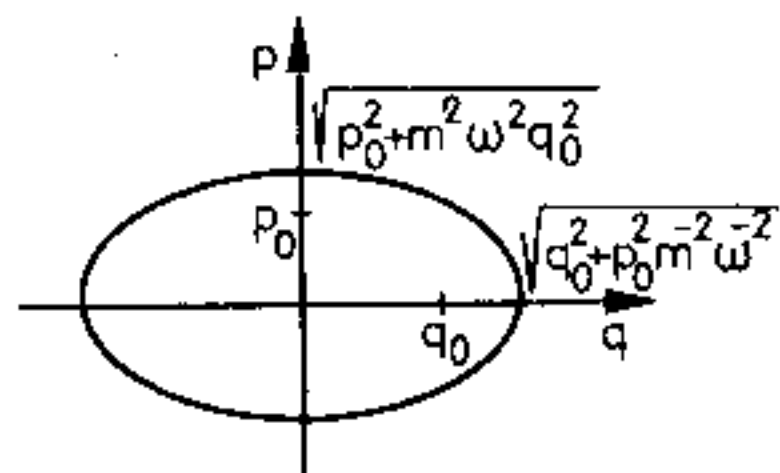
11.55. A fázisgörbe: parabola.



11.56.



11.57. A fázisgörbe: ellipszis.



11.58. A fázisgörbe ismeretében (l. 11.54. feladat) az I mennyiség könnyen meghatározható:

$$I = 2p_0l.$$

Abban az esetben, ha a fal mozog, érdemes olyan hosszú t időintervallumokat vizsgálnunk, mely alatt a részecske már sokszor ütközött a fallal, így ugyanis megszabadulunk a kezdeti feltételektől. A mozgó fallal történő rugalmas ütközés következtében a részecske minden alkalommal $-2mu$ impulzust veszít. Így t idő után impulzusának megváltozása $\Delta p_0 = -2mu \cdot n$, ahol n az ütközések száma. u -ban elég elsőrendig számolnunk, hiszen u kicsi, így Δp_0 kiértékelésekor n -et a nyugvó falu dobozban levő részecske ütközési számával közelíthetjük; $n = \frac{tp_0}{2lm}$. Így tehát $\Delta p_0 = -p_0 \frac{ut}{l}$. Másrészt

$$\Delta I = 2(\Delta p_0 l + p_0 ut),$$

amibe Δp_0 -t behelyettesítve, $\Delta I = 0$.

11.59. Szabadesés esetén (l. 11.55. feladat) az adiabatikus invariáns $g^{1/2}h^{3/2}$, ahol h az esési magasság, g a pillanatnyi gravitációs gyorsulás. A jelenséget a lifttel együtt mozgó koordináta-rendszerből vizsgálva, $g = g_0 + a(t)$, ahol $a(t)$ a pillanatnyi gyorsulás, g_0 a normális gravitációs gyorsulás. Ebből

$$h(t) = h_0 \left[\frac{g_0 + a(t)}{g_0} \right]^{-1/3}$$

Itt h_0 a kezdeti felpattanási magasság.

11.60. $E \sim \omega$.

11.61. $\varphi_0^4 l^3 \sim \text{áll.}$

11.62. $E \sim R^{-2}$.

11.63. A λ paramétertől függő rendszer esetén a λ adiabatikus változásakor állandónak maradó mennyiség $I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq$. (Itt a

körintegrált állandó E és λ mellett kell venni; Landau-Lifsic: Mechanika (49.7.)). Esetünkben $E = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m}$, ezért I az

impulzustérbeli $\sqrt{2mE}$ sugarú gömb $\frac{4\pi}{3} (2mE)^{3/2}$ térfogatának

és a koordinátatérbeli térfogat a^3 szorzatával fejezhető ki:

$I = \frac{2}{3} a^3 (2mE)^{3/2}$. Ez a változásakor akkor lesz invariáns, ha

$E \sim a^{-2}$. A rugalmas ütközések miatt a részecske $F = \frac{\Delta I}{\Delta t}$ nyo-

móerőt gyakorol a falra; $\Delta I \sim p$, $\Delta t \sim \frac{a}{v} = \frac{ma}{p}$; így nyomása

$P \sim \frac{F}{a^2} \sim \frac{E}{a^3}$. Az adiabatikus állapotegyenlet $p \cdot V^{5/3} \sim$

$\sim \frac{E}{a^3} \cdot a^5 = Ea^2 = \text{állandó}$; tehát alakilag az előző összefüggést adja.

12. Merev testek mozgása

12.1. A tehetetlenségi tenzor $\Theta_{ij} = \sum_n m_n (\delta_{ij} x_n^2 - x_i^{(n)} x_j^{(n)})$, ($i, j = 1, 2, 3$). Itt $x_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, 3$) az m_n tömegpont koordinátái a kérdéses koordináta-rendszerben és $x_n^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^{(n)2}$. Eseteinkben a tehetetlenségi tenzorok:

a)

$$\Theta_{ij} = \begin{pmatrix} 2a^2(m+M) & 2a^2(m-M) & 0 \\ 2a^2(m-M) & 2a^2(m+M) & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2(m+M) \end{pmatrix}.$$

b)

$$\Theta_{ij} = \begin{pmatrix} 4a^2m & 0 & 0 \\ 0 & 4a^2M & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2(m+M) \end{pmatrix}.$$

A pusztán diagonális Θ_{ij} főátlójában álló elemek a fő tehetetlenségi nyomatékok és az x', y', z' tengelyek iránya a fő tehetetlenségi irányokat adja.

12.2. Egy adott tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték folytonos tömegeloszlású test esetén $\Theta = \int x^2 dm$. Itt x^2 a dm tömegelem távolsága a tengelytől. A homogén rúdra $dm = \rho dx = \frac{m}{l} dx$; így a súlyponton átmenő tengely esetén

$$\Theta_s = \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{12} ml^2,$$

a végponton átmenő tengely esetén

$$\Theta_v = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{3} ml^2.$$

Ha a tömegeloszlás $\rho(x)$, akkor a megfelelő tehetetlenségi nyomatékok: $\Theta_s = \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 \rho(x) dx$, illetve: $\Theta_v = \int_0^l x^2 \rho(x) dx$.

12.3. Folytonos tömegeloszlású testre $\Theta_{ij} = \int \rho (\delta_{ij} x^2 - x_i x_j) d^3x$. Az a) esetben

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \rho \int dx_1 dx_2 (x_2^2 + x_3^2) = \rho \int dx_1 dx_2 x_2^2 = \\ &= \rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^R r dr r^2 \sin^2 \varphi = \rho \frac{\pi}{2} \frac{R^4}{4} = M \frac{R^2}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{12} &= -\rho \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 = \\ &= -\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^R r dr r^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0 = \Theta_{21}, \end{aligned}$$

$$\Theta_{22} = \Theta_{11}; \quad \Theta_{33} = \rho \int dx_1 dx_2 (x_1^2 + x_2^2) = M \frac{R^2}{2};$$

$$\Theta_{31} = \Theta_{32} = \Theta_{13} = \Theta_{23} = 0,$$

mert a félkörlelap az xy síkban fekszik.

b)

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \rho \int x_2^2 dx_1 dx_2 = \rho \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} x_2^2 dx_2 = \\ &= \frac{\rho}{12} a^4 = \frac{1}{6} Ma^2 = \Theta_{22}, \end{aligned}$$

$$\Theta_{12} = -\rho \int x_1 x_2 dx_1 dx_2 = -\frac{1}{12} Ma^2 = \Theta_{21},$$

$$\Theta_{33} = \frac{1}{3} Ma^2,$$

$$\Theta_{31} = \Theta_{32} = \Theta_{13} = \Theta_{23} = 0.$$

12.4. Az a) esetben Θ_{ij} diagonális, ezért a főátlóban álló elemek $M \frac{R^2}{4}, M \frac{R^2}{4}, M \frac{R^2}{2}$ – megadják a fő tehetetlenségi nyomatékokat.

b) Általában a fő tehetetlenségi nyomatékokat a $\det(\Theta_{ij} - \Theta \delta_{ij}) = 0$ szekuláris egyenlet gyökei adják. Ez az egyenlet most az

$$\left(\frac{1}{3}Ma^2 - \Theta\right) \left\{ \left(\frac{1}{6}Ma^2 - \Theta\right)^2 - \frac{1}{(12)^2}(Ma^2)^2 \right\} = 0$$

alakot ölti. Innen a fő tehetetlenségi nyomatékok:

$$\Theta_1 = \frac{1}{3}Ma^2, \quad \Theta_2 = \frac{1}{4}Ma^2, \quad \Theta_3 = \frac{1}{12}Ma^2.$$

12.5. Az n_i irányvektorú egyenesre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték $\Theta_n = \sum_{i,j} \Theta_{ij} n_i n_j$ ($i, j = 1, 2, 3$). Így az a) esetben

$$\Theta_n = \frac{1}{4}MR^2, \text{ a b) esetben } \Theta_n = \frac{1}{12}Ma^2 \text{ adódik.}$$

12.7. B.

12.8. A tehetetlenségi tenzor:

$$\Theta_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 \end{pmatrix}.$$

A fő tehetetlenségi nyomatékokat a $\det(\Theta_{ij} - \Theta \delta_{ij}) = 0$ egyenlet gyökei adják. A $\beta = Ma^2$ jelöléssel az egyenlet:

$$\left(\frac{11}{12}\beta - \Theta\right) \left[\left(\frac{2}{3}\beta - \Theta\right)^2 - \frac{1}{8}\beta^2 - \frac{1}{4}\beta \left(\frac{2}{3}\beta - 1\right) \right] = 0.$$

$$\text{Innen } \Theta_1 = \frac{1}{6}\beta, \quad \Theta_2 = \frac{11}{12}\beta, \quad \Theta_3 = \frac{11}{12}\beta.$$

A Θ_1 -hez tartozó fő tengely szimmetriatengely kell, hogy legyen, mert $\Theta_2 = \Theta_3$. A kocka csúcsán csak egy szimmetriatengely halad keresztül: a kocka testátlója; ezért ez lesz az egyik tehetetlenségi irány. A másik két főirány a testátlóra merőleges síkban fekszik, $\Theta_2 = \Theta_3$ miatt ebben a síkban tetszőlegesen választható.

12.9. A kocka – középpontjára vonatkozó – tehetetlenségi tenzora (ha a lapközepponatokon átmenő egyeneseket választjuk koordinátatengelyeknek): $\Theta_{ij} = \frac{1}{6}Ma^2 \delta_{ij}$. Az n_i irányvektorú egyenesre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_n = \sum_{i,j} \Theta_{ij} n_i n_j = \frac{1}{6}Ma^2 \sum_{i,j} \delta_{ij} n_i n_j = \frac{1}{6}Ma^2,$$

minden tengelyre ugyanakkora!

12.10. a) $\frac{2}{5}MR^2$; b) $\frac{3}{10}MR^2$; c) $\frac{M}{2}R^2$; d) $\frac{M}{2}R^2$;

e) $\frac{1}{6}Ma^2$; f) ha az élek a, b, c hosszúságúak, akkor az élekkel párhuzamos tengelyekre rendre

$$\frac{M}{12}(b^2 + c^2), \quad \frac{M}{12}(c^2 + a^2), \quad \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

12.11. A 12.10. feladat megoldását használva a tömegközépponton átmenő $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ irányú tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta_{ik} = \frac{M}{12}(b^2 + c^2) \frac{1}{4} + \frac{M}{12}(a^2 + c^2) \frac{1}{4} + \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \frac{1}{2}.$$

A csúcsponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot a Steiner-tétel segítségével kapjuk:

$$\Theta_{cs}^{(n)} = \Theta_{tk}^{(n)} + M \{ \mathbf{a}^2 - (\mathbf{an})^2 \} = \Theta_{tk} + M \left\{ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{2} - \left(-\frac{a}{4} - \frac{b}{4} + \frac{c}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right\}.$$

- 12.12.** A tehetetlenségi tenzor ismerete ekvivalens a tehetetlenségi ellipszoid ($\Theta_{ik}x_ix_k = 1$) megadásával. Egy olyan ellipszoid, amelynek fő tengelyei mind különböző hosszúságúak, csak valamelyik fő tengelye körül 180° -kal elforgatva megy át önmagába. Ettől különböző szimmetriája egy ellipszoidnak csak akkor lehet, ha két, vagy mindhárom fő tengelye egyforma hosszú – tehát forgási ellipszoid vagy gömb esetén. Jelen esetben a tetraéder középpontján és valamelyik csúcán áthaladó egyenes körül 120° -os forgatást végezve, a tetraéder önmagába megy át. Nyilvánvaló, hogy a tehetetlenségi ellipszoidnak ilyen szimmetriája csak akkor lehet, ha gömb, tehát mindhárom fő tehetetlenségi nyomatéka megegyezik.

12.14. $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : 1$.

12.15. $\Theta_1 = 2m_H d^2 \sin^2 \alpha; \quad \Theta_2 = 2 \frac{m_o m_H}{m_o + 2m_H} d^2 \cos^2 \alpha;$
 $\Theta_3 = \Theta_1 + \Theta_2.$

12.16. $\Theta = \frac{3}{20} m R^2 \frac{R^2 + 6h^2}{R^2 + h^2}.$

12.17.

I. megoldás

A végzett munka megegyezik a rendszer kinetikus energiájával:

$$W = \frac{1}{2} \omega^2 (M_1 x^2 + M_2 (l-x)^2).$$

Ennek akkor van minimuma, ha $\frac{dW}{dx} = 0$, vagyis

$$\omega^2 (M_1 x - M_2 (l-x)) = 0,$$

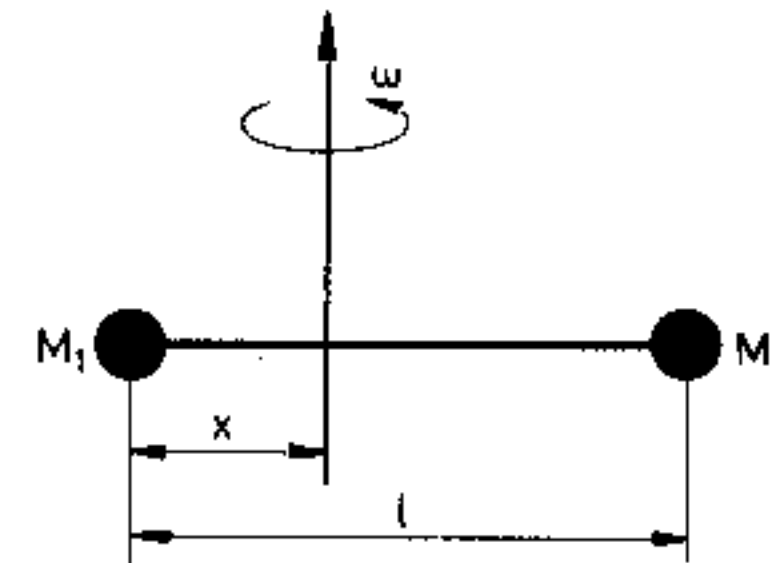
ahonnan

$$x = l \frac{M_2}{M_2 + M_1}.$$

Ez azt jelenti, hogy a tengely éppen a tömegközépponton megy keresztül.

II. megoldás

Egy forgó merev test mozgási energiája $\frac{1}{2} \Theta \omega^2$, ahol Θ a forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték. Egymással párhuzamos tengelyek közül – a Steiner-tétel alapján – a súlyponton átmenőhöz tartozik a legkisebb tehetetlenségi nyomaték. Ebből következik, hogy a keresett tengely átmegy a tömegközépponton.

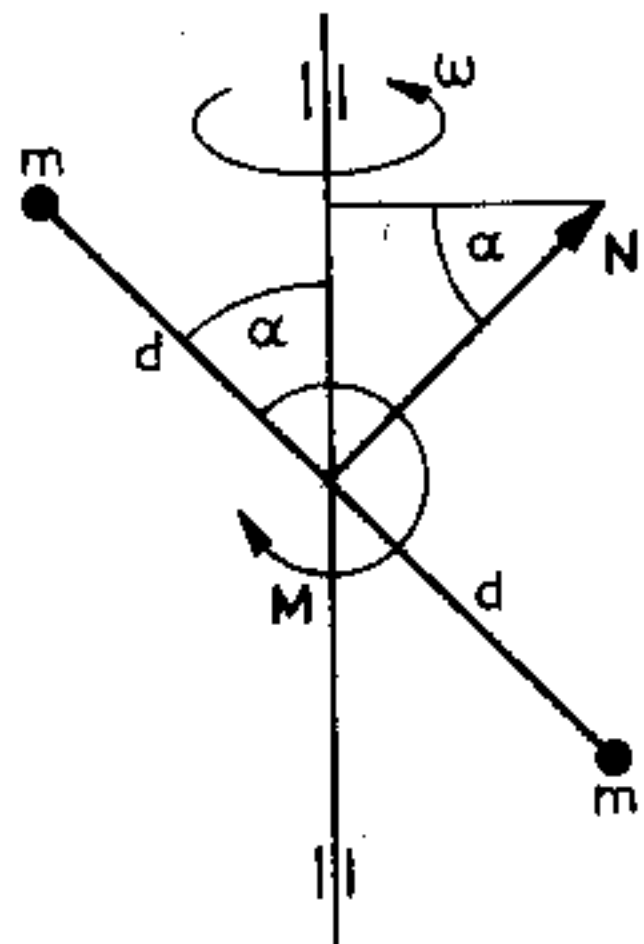


- 12.18.** $E_{kin} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$; itt Θ az x távolságban levő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta = \frac{m}{l} \int_{-x}^{l-x} y^2 dy = \frac{m}{3l} \{ (l-x)^3 + x^3 \}.$$

A $\frac{dE_{kin}}{dx} = 0$ egyenlet megoldása: $x = \frac{l}{2}$ adja a tengely keresett távolságát a rúd végétől.

12.19.

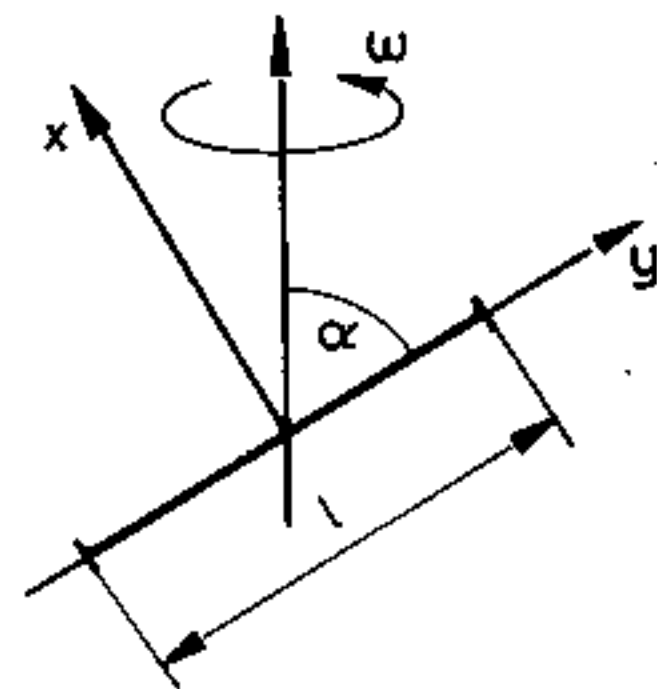


- a) $|N| = 2md^2\omega \sin \alpha$;
 b) $|\dot{N}| = 2md^2\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha$;
 c) $|M| = 2md^2\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha$.

12.20. a) $E_{\text{kin}} = \sum_{i,j} \Theta_{ij} \omega_i \omega_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$.

Esetünkben

$$\Theta_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} ml^2 \end{pmatrix}$$



ha a koordináta-rendszert az ábra szerint választjuk. (A z-tengely kifelé mutat.) A szögsebesség vektor $\omega = \omega(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$. Így $E_{\text{kin}} = \frac{1}{24} \omega^2 ml^2 \cos^2 \alpha$. Ez termé-

szetesen felírható $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$ alakban is, ekkor a Θ rúddal α szöget bezáró tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték: $\Theta = \frac{1}{12} ml^2 \cos^2 \alpha$.

- b) A Steiner-tétel segítségével a súlyponttól d távolságra levő tengelyre $\Theta_d = \frac{1}{12} ml^2 \cos^2 \alpha + md^2 \cos^2 \alpha$, így

$$E_{\text{kin}} = \frac{\omega^2}{24} ml^2 \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} m \omega^2 d^2 \cos^2 \alpha.$$

Ezt a kifejezést értelmezhetjük úgy is, hogy az első tag a tömegközéppont körüli forgási energia, a második pedig a tömegközéppont haladó mozgásából eredő mozgási energia.

12.21. a) A félkörlapra $E_{\text{kin}} = \frac{\omega^2 R^2 m}{8}$, a háromszöglapra $E_{\text{kin}} = \frac{\omega^2}{24} Ma^2$.

b) A félkörlapra $E_{\text{kin}} = \frac{\omega^2 R^2 m}{6}$, a háromszöglapra $E_{\text{kin}} = \frac{\omega^2}{18} Ma^2$.

Az impulzusnyomaték L_i komponenseit az $L_i = \sum_{j=1}^3 \Theta_{ij} \omega_j$ összefüggésből határozhatjuk meg.

a) A félkörlapra $L_1 = -\frac{\omega}{\sqrt{2}} m \frac{R^2}{4}$, $L_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2}} m \frac{R^2}{4}$,
 $L_3 = 0$;

a háromszöglapra $L_1 = -\frac{\omega}{\sqrt{2}} Ma^2 \frac{1}{4}$, $L_2 = \frac{\omega}{\sqrt{2}} Ma^2 \frac{1}{4}$,
 $L_3 = 0$.

b) A félkörlapra $L_1 = \frac{\omega}{\sqrt{3}} m \frac{R^2}{4}$, $L_2 = \frac{\omega}{\sqrt{3}} m \frac{R^2}{4}$,
 $L_3 = \frac{\omega}{\sqrt{3}} m \frac{R^2}{2}$;

a háromszöglapra $L_1 = \frac{\omega}{\sqrt{3}} Ma^2 \frac{1}{12}$, $L_2 = \frac{\omega}{\sqrt{3}} Ma^2 \frac{1}{12}$,
 $L_3 = \frac{\omega}{\sqrt{3}} Ma^2 \frac{1}{3}$.

12.22. $E_{\text{forg}} = \frac{1}{8} mR^2(1 + \cos^2 \alpha)\omega^2$.

12.23. Vegyük észre, hogy az M tömeg földre érkezésekor az m tömegek lesznek a létraszárak pillanatnyi forgástengelyei. Az energiamegmaradásból az a) esetben azt kapjuk, hogy

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv_a^2, \quad v_a = \sqrt{2gh}, \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

A b) esetben a potenciális energia induláskor $V = Mgh + 2M_2g \frac{h}{2}$; a földre érkezéskor a mozgási energia pedig $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} Mv_b^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Theta \omega^2$.

Itt $\Theta = \frac{1}{3} M_2 l^2$ a létraszárak a pillanatnyi forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka, ω pedig a létraszár pillanatnyi szögsebessége: $v_b = l\omega$.

Az energiamegmaradásból $v_b = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{3(M+M_2)}{3M+2M_2}}$.

12.25. A rendszer impulzusnyomatéka megmarad:

$$\Theta_1 \omega_1 + \Theta_2 \omega_2 = (\Theta_1 + \Theta_2) \omega,$$

innen

$$\omega = \frac{\Theta_1 \omega_1 + \Theta_2 \omega_2}{\Theta_1 + \Theta_2}.$$

12.26. a) Fennáll a felfüggesztési pontra vonatkozó impulzusmomentum megmaradása: $mv_0 l = \Theta \Omega$.

Itt $\Theta = \frac{1}{3} Ml^2 + ml^2$ az ütközés utáni rendszer tehetetlenségi nyomatéka és Ω e rendszer szögsebessége:

$$\Omega = \frac{3mv_0}{(M+3m)l}.$$

A rúdból és a rátapadt tömegeből álló rendszer Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{1}{2} \Theta \dot{\varphi}^2 + Mg \frac{l}{2} \cos \varphi + mgl \cos \varphi.$$

Kis φ -re innen a mozgásegyenlet: $\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$; $\omega^2 = \frac{3g}{2l} \frac{M+2m}{M+3m}$. Ennek a $\dot{\varphi}(0) = \Omega$, $\varphi(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$\varphi(t) = B \sin \omega t, \quad B = \frac{3mv_0}{l(M+3m)\omega}.$$

b) Ebben az esetben az impulzusmomentum megmaradása:

$$m(v_0 - v)l = \Theta \Omega, \quad \Theta = \frac{1}{3} Ml^2 \text{ a rúd tehetetlenségi nyomatéka, } v \text{ pedig } m \text{ sebessége az ütközés után. Most fennáll az energiamegmaradás is:}$$

$\frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} \Theta \Omega^2 + \frac{1}{2} mv^2$.

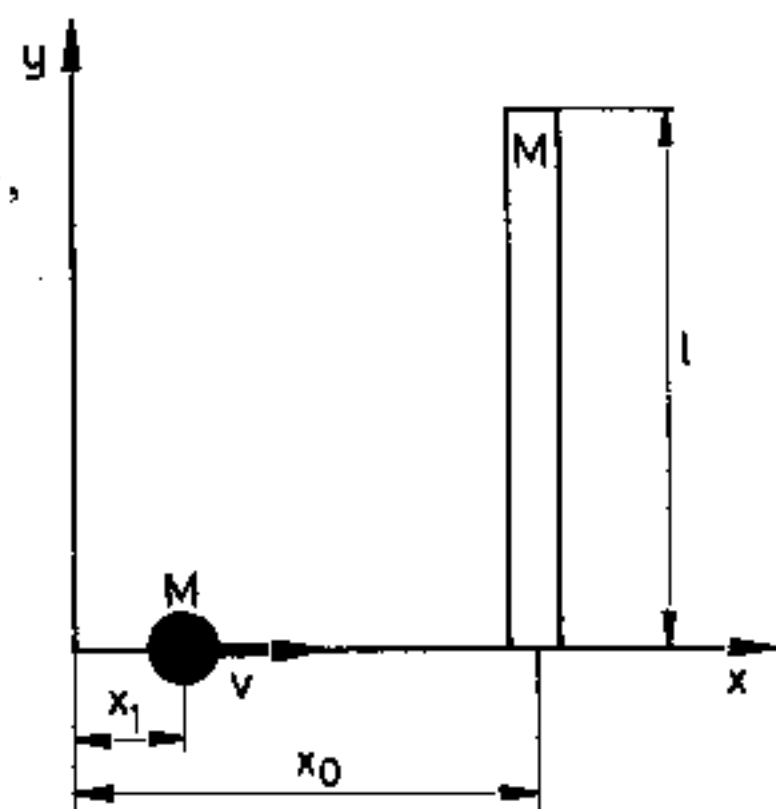
E két egyenletből $v = v_0(ml^2 - \Theta)/(ml^2 + \Theta)$, $\Omega = 2mv_0 l/(ml^2 + \Theta)$. Ütközés után az m tömeg v sebességű mozgást végez, a rúd pedig az $\omega = \sqrt{3g/(2l)}$ frekvenciájával ingamozgást végez: $\varphi(t) = A \sin \omega t$. A -t ismét a $\dot{\varphi}(0) = \Omega$ kezdeti feltételből kapjuk:

$$A = \frac{2mv_0 l}{\omega(ml^2 + \Theta)}.$$

12.27. a) A rendszer tömegközéppontjának koordinátái (ütközés előtt):

$$X = \frac{Mx_1 + Mx_0}{2M} = \frac{x_1 + x_0}{2},$$

$$Y = \frac{M \frac{l}{2} + 0}{2M} = \frac{l}{4}.$$



Ütközés előtt a tömegközéppont sebessége $\dot{X} = \frac{\dot{x}_1}{2} = \frac{v}{2}$, $\dot{Y} = 0$. A rendszerre külső erő nem hat, ezért ütközés után is ugyanekkora marad a tömegközéppont sebessége.

b) A tömegközéppontra vonatkozó impulzusnyomaték megmarad, ezért értéke ütközés után is $Mv \frac{l}{4}$.

c)

$$\Delta E = \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} (M + M) \left(\frac{v}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \Theta \omega^2.$$

A második tag a tömegközéppont haladó mozgásából eredő mozgási energia, a harmadik a tömegközéppont körüli forgási energia,

$$\Theta = \frac{1}{12} Ml^2 + M \left(\frac{l}{4} \right)^2 + M \left(\frac{l}{4} \right)^2 = \frac{5Ml^2}{24},$$

a tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, $\omega = Mvl/(4\Theta)$ a tömegközéppont körüli forgás szögsebessége. Ezeket behelyettesítve: $\Delta E = \frac{Mv^2}{10}$.

12.28. Használjuk az energia- és impulzusnyomaték-megmaradást (12.27. feladat)! Az m ütközés utáni sebessége

$$v = v_0 \frac{mr^2 - \Theta}{mr^2 + \Theta}, \quad \Theta = \frac{2}{3} \rho ab^3.$$

A lap az ütközés után $\omega = \sqrt{\frac{D}{\Theta}} = \sqrt{\frac{3D}{2\rho ab^3}}$ frekvenciájú

$A = \frac{2mv_0 r}{\omega(mr^2 + \Theta)}$ amplitúdójú rezgőmozgást végez.

$$12.30. \alpha = \frac{\pi\omega R}{v} \left(1 - \sqrt{\frac{2M}{2M + 5m}} \right).$$

12.31. Az impulzusmomentum-megmaradás $J = \Theta\dot{\phi} = \text{állandó}$ alakjából – minthogy $\Theta \sim R^2$ – következik, hogy $2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta\dot{\phi}}{\dot{\phi}} = 0$. Így R 1%-os növekedése $\dot{\phi}$ 2%-os csökkenését eredményezi. A forgási energia $E_{\text{forg}} = \frac{\Theta\dot{\phi}^2}{2} = \frac{J\dot{\phi}}{2}$, ezért E_{forg} is 2%-kal csökken.

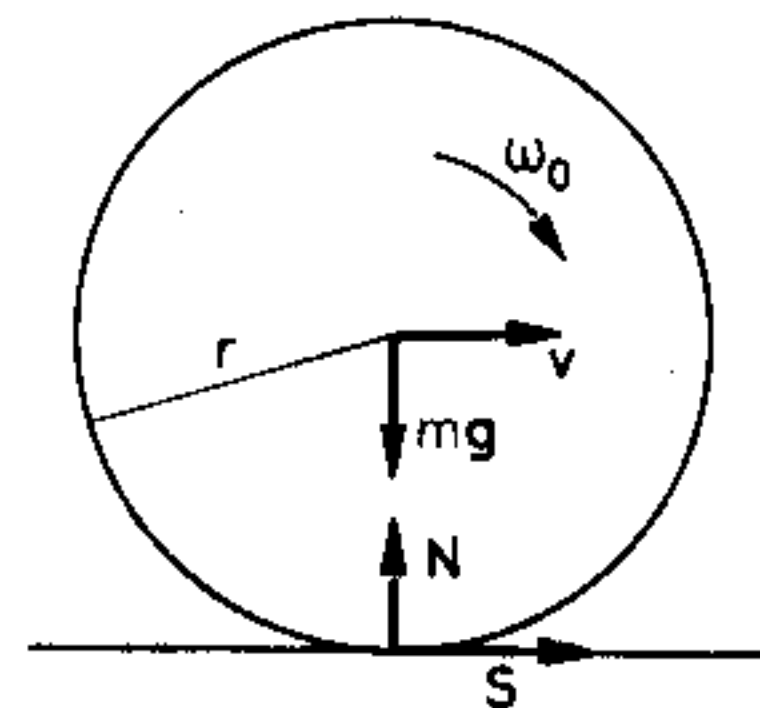
12.32. Kezdetben a henger csúszik, ezért a mozgásegyenletek:

$$mg - N = 0 \quad (\text{függőlegesen nem gyorsul}),$$

$$S = ma,$$

$$-Sr = \Theta\beta,$$

$$S = \mu N \quad (\text{csúszás}).$$



Innen kapjuk: $a = \mu g$, $\beta = -\frac{2\mu g}{r}$, azaz figyelembe véve a $v=0$, $\omega = \omega_0$ kezdeti feltételt:

$$v = \mu g t, \quad \omega = \omega_0 - \frac{2\mu g}{r} t.$$

Ez természetesen csak addig áll fenn, amíg a csúszás feltétele teljesül.

A legalsó pont sebessége: $v - r\omega = 3\mu g t - r\omega_0$. Ha ez 0 lesz, a csúszás megszűnik. Ez $T = \frac{r\omega_0}{3\mu g}$ idő múlva következik be; a

gördülés sebessége pedig $v = \mu g T = \frac{r\omega_0}{3}$.

12.33. Legyen a korong sugara R , tömege M , a korong és az asztal közötti súrlódási együttható μ , a korong kezdeti szögsebessége ω_0 . A korong forgását a súrlódási erő fékezi. A súrlódási erő forgatónyomatéka:

$$-\int_0^R dr \cdot r \int_0^{2\pi} d\varphi r \left(\mu \frac{Mg}{R^2 \pi} \right) = -\frac{2}{3} \mu Mg R.$$

Az impulzusmomentum függőleges komponensére vonatkozó egyenlet:

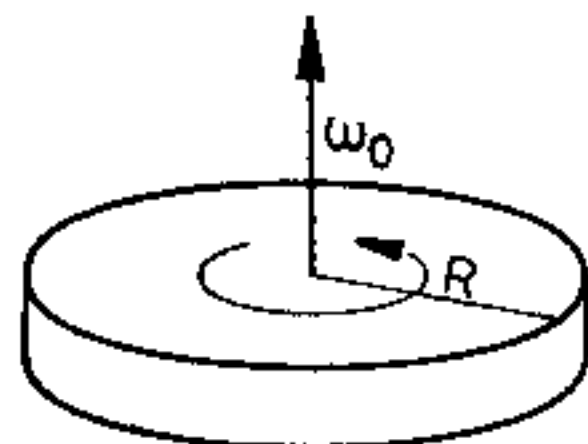
$$\frac{1}{2} MR^2 \dot{\omega} = -\frac{2}{3} \mu Mg R,$$

$$\dot{\omega} = -\frac{4}{3} \frac{\mu g}{R}.$$

Így

$$\omega = \omega_0 - \frac{4}{3} \frac{\mu g}{R} t.$$

A korong $T = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$ idő múlva áll meg.

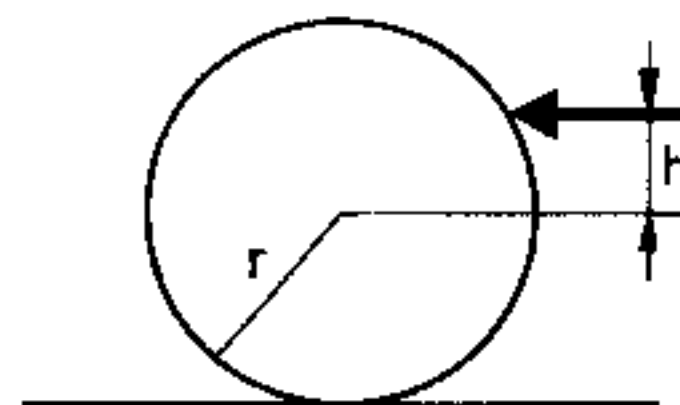


12.34. $t = \frac{2v_0}{7\mu g}$ idő múlva kezd gördülni, sebessége ekkor $v = \frac{5}{7} v_0$ és

$$s = \frac{12v_0^2}{49\mu g} \text{ utat tett meg eddig.}$$

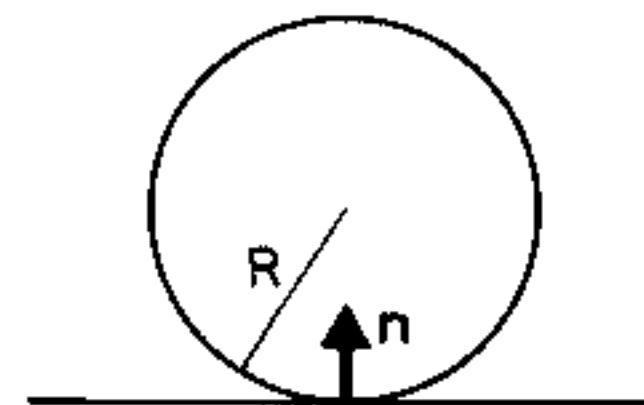
12.35. A τ idejű lökés alatt, ha az h magasságban történt $F\tau$ erőlöket és $F\tau h$ impulzusnyomaték-lökést közöltünk a golyóval. Ezért $F\tau = mv$ és $F\tau h = \Theta\omega$. A csúszásmentesség feltétele $r\omega = v$. Így

$$h = \frac{\Theta}{mr} = \frac{2}{5} r.$$



12.36. A gömb tömegközéppontjának sebessége v , szögsebessége ω . A gömb talajjal érintkező pontjának sebessége

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + R\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}.$$



Amíg $\mathbf{u} \neq 0$, a gömb csúszik a talajon. A reá ható súrlódási erő:

$$\mathbf{F} = -\mu mg \frac{\mathbf{u}}{u}.$$

A gömb mozgásegyenletei:

$$m\dot{v} = \mathbf{F} = -\mu mg \frac{\mathbf{u}}{u};$$

$$\Theta\dot{\boldsymbol{\omega}} = -R\mathbf{n} \times \mathbf{F} = \mu m R g \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{u}}{u},$$

ahol $\Theta = \frac{2}{5}mR^2$. Vegyük észre, hogy $(\dot{\omega}\mathbf{n})=0$, azaz a függőleges komponens állandó. \mathbf{u} a következő differenciálegyenletet elégíti ki:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v} + R\mathbf{n} \times \dot{\omega} = -\mu g \frac{\mathbf{u}}{u} + \frac{\mu g}{2} \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u})}{u}$$

A vektorszorzatra vonatkozó összefüggést használjuk fel:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{n}\mathbf{u})\mathbf{n} - n^2\mathbf{u} = -\mathbf{u}.$$

Ezért

$$\dot{\mathbf{u}} = -\frac{7}{2}\mu g \frac{\mathbf{u}}{u}.$$

Legyen $t=0$ -ban

$$\mathbf{u}(0) = u_0\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}_0 + R(\mathbf{n} \times \omega_0).$$

Ekkor a fenti egyenlet megoldása:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\beta} \left(u_0 - \frac{7}{2}\mu g t \right).$$

A gömb talajjal érintkező pontjának sebessége $t = \frac{2u_0}{7\mu g}$ -ben nulla lesz. Eddig a pillanatig \mathbf{u} iránya állandó. A súrlódási erő is állandó:

$$\mathbf{F} = -\mu mg\boldsymbol{\beta}$$

A tömegközéppont parabolapályán mozog:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \mu g t \boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \mu g \frac{t^2}{2} \boldsymbol{\beta}.$$

A szögsebességre vonatkozó egyenlet:

$$\dot{\omega} = \frac{5\mu g}{2R} (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}).$$

Megoldása:

$$\omega = \omega_0 + \frac{5\mu g}{2R} t (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}).$$

$t \geq \frac{2u_0}{7\mu g}$ időben a golyó tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \frac{2u_0}{7} \boldsymbol{\beta}.$$

Szögsebessége:

$$\omega = \omega_0 + \frac{5u_0}{7R} (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}).$$

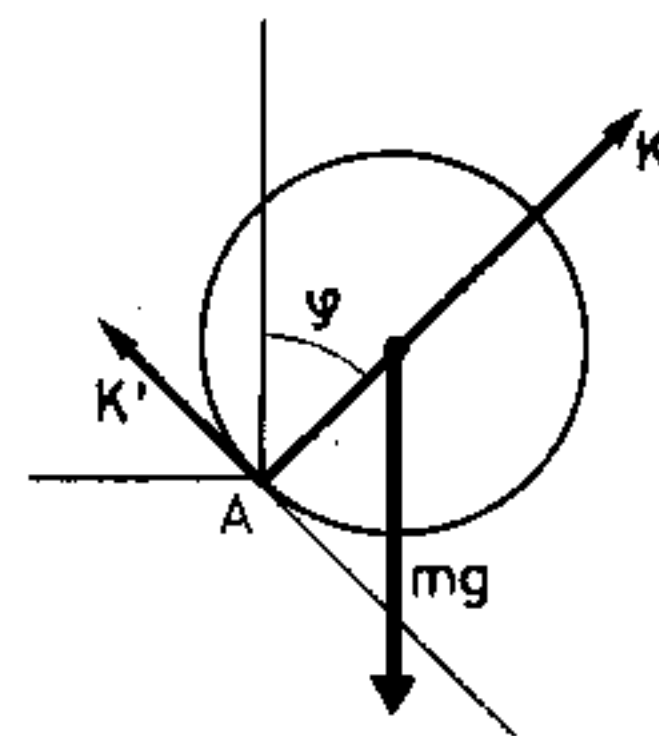
(Ellenőrizhető: $\mathbf{v} + R(\mathbf{n} \times \omega) = 0$.)

12.37. Tökéletes gördülést feltételezünk. A golyó az A pont körül forgómozgást végez, amíg a kényszererő révén az asztal nyomást fejt ki rá, ill. amíg sebességének iránya lejtőirányú lesz.

A mozgásegyenlet az A pont körül:

$$mr\omega^2 = mg \cos \varphi - K,$$

ahol $\omega = \frac{v}{r}$ a forgómozgás szögsebessége, v a tömegközéppont sebessége.



Az energiamegmaradás egyenlete:

$$\frac{1}{2} \Theta \omega_0^2 + mgr = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 + mgr \cos \varphi,$$

ahol $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$, $\Theta = mr^2 + \Theta_s$, a kerületi pontra vonatkozó tehetlenségi nyomaték, és Θ_s a súlyponti tehetlenségi nyomaték (gömb: $\Theta_s = \frac{2}{5}mr^2$, henger: $\Theta_s = \frac{1}{2}mr^2$).

$$\begin{aligned} K &= mg \cos \varphi - mr\omega^2 = \\ &= mg \cos \varphi - mr \left[\omega_0^2 + \frac{2mgr}{\Theta} - \frac{2mgr \cos \varphi}{\Theta} \right] = \\ &= m \left[g \cos \varphi \left(1 + \frac{2mr^2}{\Theta} \right) - \frac{2mr^2}{\Theta} g - r\omega_0^2 \right]. \end{aligned}$$

A test addig van a felületen, amíg $K \geq 0$, azaz

$$g \cos \varphi \left(1 + \frac{2mr^2}{\Theta} \right) - g \frac{2mr^2}{\Theta} - r\omega_0^2 \geq 0.$$

Mivel $\varphi \leq \alpha$, a golyó (henger) nem hagyja el a felületet, ha

$$v_0^2 = r^2 \omega_0^2 \leq gr \left[\left(1 + \frac{2mr^2}{\Theta} \right) \cos \alpha - \frac{2mr^2}{\Theta} \right] = v_{0kr}^2.$$

Ha ez nem teljesül, akkor a golyó (henger) valamely $0 \leq \varphi^* < \alpha$ szögnél elhagyja a felületet. A φ^* -öt meghatározó egyenlet:

$$\cos \varphi^* = \frac{v_0^2 + gr \frac{2mr^2}{\Theta}}{gr \left(1 + \frac{2mr^2}{\Theta} \right)}.$$

Ha a jobb oldal 1-nél nagyobb, a golyó már $\varphi = 0$ esetén elhagyja a felületet.

Összefoglalva:

$$v_0^2 \geq gr \quad \text{esetén} \quad \varphi^* = 0$$

$$v_{0kr}^2 < v_0^2 \leq gr \quad \text{esetén} \quad \cos \varphi^* = \frac{v_0^2 + gr \frac{2mr^2}{\Theta}}{gr \left(1 + \frac{2mr^2}{\Theta} \right)},$$

$$v_0^2 \leq v_{0kr}^2 \quad \text{esetén nem hagyja el a felületet.}$$

12.38. Ha a lejtő elég hosszú, egyenletes mozgás alakul ki. Ennek sebességét számítsuk ki az impulzusmomentumra vonatkozó egyenlet segítségével. Feltesszük, hogy a láda vége alatt levő görgők kerületi pontjai a ládával egyező sebességgel mozognak:

$$Mg(r+a) \sin \alpha = \frac{v_0}{d} \Theta \frac{v_0}{r}.$$

Ebből:

$$v_0^2 = \frac{Mg(r+a)rd \sin \alpha}{\Theta}.$$

Ha a görgők tömör hengerek, $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$, és továbbá $d \sim 2r$, $r \ll a$:

$$v_0^2 = \frac{4Mga \sin \alpha}{m}.$$

A lejtőn a láda sebessége nem haladhatja meg a fenti sebességet:

$$v \leq v_0.$$

12.39. Legyen x az m_1 tömeg magassága az egyensúlyi helyzet fölött.

A rendszer mozgási energiája $T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\Theta\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. α a csiga elfordulása; a tapadás miatt $R\dot{\alpha} = \dot{x}$; $m = \rho l A$

a kötélt tömege és $\Theta = \frac{1}{2}MR^2$ a csiga tehetetlenségi nyomatéka. A rendszer potenciális energiája $V = m_1gx - m_2gx - mgx \frac{x}{l}$, és így a Lagrange-függvény:

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 \left\{ m_1 + m_2 + m + \frac{1}{2}M \right\} - gx \left(m_1 - m_2 - m \frac{x}{l} \right).$$

A mozgásegyenlet innen:

$$\ddot{x} = g \frac{m_2 - m_1}{\sum m_i} + \frac{2mg}{\sum m_i} \frac{x}{l}; \quad \sum m_i = m_1 + m_2 + m + \frac{1}{2}M.$$

Ennek az $\dot{x}(0)=0$, $x(0)=0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$x(t) = \frac{m_2 - m_1}{2m} l \left\{ \operatorname{ch} t \sqrt{\frac{2mg}{l \sum m_i}} - 1 \right\}.$$

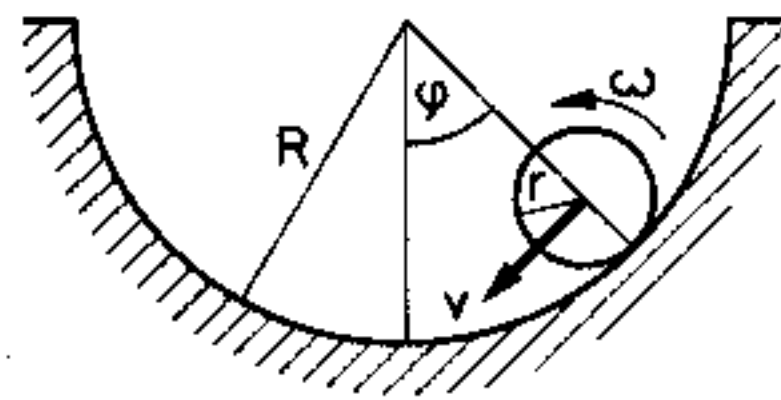
12.40. $v = r\omega = (R-r)\dot{\varphi}$, a csúszásmentesség miatt. A mozgási energia $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2$, a potenciális energia $V = -mg(R-r)\cos\varphi$. Így a Lagrange-függvény:

$$L = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + mg(R-r)\cos\varphi,$$

ezért a mozgásegyenlet:

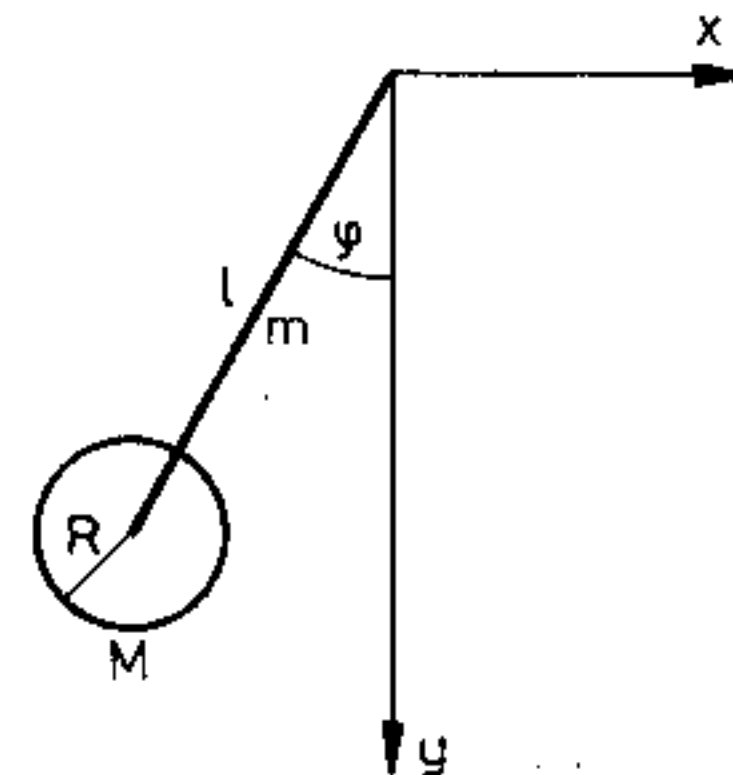
$$\ddot{\varphi} = -\frac{2g}{3(R-r)}\sin\varphi.$$

Ez inga egyenlete; az inga effektív hossza $\frac{3(R-r)}{2}$.



12.41. a) A rendszer mozgási energiája $T = \frac{1}{2}\Theta_k\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\Theta_r\dot{\varphi}^2$. Az első tag a korong tömegközéppont körüli forgási energiája, $\Theta_k = \frac{1}{2}MR^2$, a második a korong haladó mozgásából eredő mozgási energia ($v^2 = l^2\dot{\varphi}^2$), a harmadik a rúd forgási energiája $\Theta_r = \frac{1}{3}ml^2$. A potenciális energia $V = -\left(Mgl\cos\varphi + mg\frac{l}{2}\cos\varphi\right)$. Így a Lagrange-függvény kis φ -re:

$$L = \frac{1}{4}MR^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{3}m\right)l^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{2}m\right)gl\varphi^2.$$



A mozgásegyenletek:

$$\dot{\alpha} = \text{állandó}, \quad \ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi, \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \frac{M + \frac{1}{2}m}{M + \frac{1}{3}m}.$$

b) A mozgási energia $T = \frac{1}{2}(\Theta_r + \Theta_k + Ml^2)\dot{\varphi}^2$.

Itt $\Theta_k + Ml^2$ a korongnak a pillanatnyi forgástengelyre – a felfüggesztésre – vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka. A potenciális energia változatlan, így kis φ -re a Lagrange-függvény:

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ml^2 + \frac{1}{2} MR^2 + Ml^2 \right) \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} \left(M + \frac{1}{2} m \right) gl\varphi^2.$$

A mozgásegyenlet

$$\ddot{\varphi} = -\omega_1^2 \varphi, \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l} \frac{M + \frac{1}{2} m}{M + \frac{1}{3} m + \frac{1}{2} M \frac{R^2}{l^2}}.$$

12.42.

$$L = \frac{1}{2} M \left(\frac{5}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{3} l^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}_1 l \cos \varphi \dot{\varphi} \right) + Mg \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

φ a rúd függőlegessel bezárt szöge, x_1 pedig a tárcsa elmozdulása. $\omega = \sqrt{\frac{5g}{7l}}$.

12.43. A korong φ szögű elfordulásakor a földhöz rögzített rugó megnyúlása $x_1 = r\varphi$. A teher x_3 elmozdulása a másik rugó x_2 megnyúlásából és a korong elfordulása miatti süllyedésből (emelkedésből) ered: $x_3 = \frac{r}{2} \varphi + x_2$. A rendszer mozgási energiája:

$$T = T_k + T_i = \frac{1}{4} mr^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{r}{2} \dot{\varphi} + \dot{x}_2 \right)^2.$$

A rendszer potenciális energiája

$$V = \frac{1}{2} kr^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 - mgx_3.$$

Így a Lagrange-függvény:

$$L = \frac{1}{4} mr^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{r^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \dot{x}_2^2 + r\dot{x}_2 \dot{\varphi} \right) + mg \left(x_2 + \frac{r\varphi}{2} \right) - \frac{k}{2} (x_2^2 + r^2 \varphi^2),$$

a mozgásegyenletek pedig:

$$\frac{1}{2} mr\ddot{\varphi} + m\ddot{x}_2 = -kx_2 + mg,$$

$$\frac{3}{4} mr^2 \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} mr\ddot{x}_2 = -kr^2 \varphi + mg \frac{r}{2}.$$

12.44.

$$\omega = \sqrt{\frac{3Mg + 2k}{2Ml}}.$$

12.45.

$$x = \frac{2b-a}{2} \cos \omega_1 t, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}};$$

$$\varphi = \frac{a}{l} \cos \omega_2 t, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

Itt x a tömegközéppont magassága, φ a tömegközéppont körüli (a vízszintestől mért) elfordulás és b a rugók hossza egyensúlyi állapotban.

12.46. $L = \frac{1}{4} MR^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} MgR \cos \varphi$. φ a felfüggesztési pontot és a negyedkör súlypontját összekötő egyenesnek a függőlegessel bezárt szöge. A kis rezgések frekvenciája: $\omega = \sqrt{\frac{8\sqrt{2}g}{3\pi R}}$.

12.47. A potenciális energia φ kitérés esetén:

$$V(\varphi) = Mg \left[R\varphi \sin \varphi + \frac{a}{2} \cos \varphi - R(1 - \cos \varphi) \right],$$

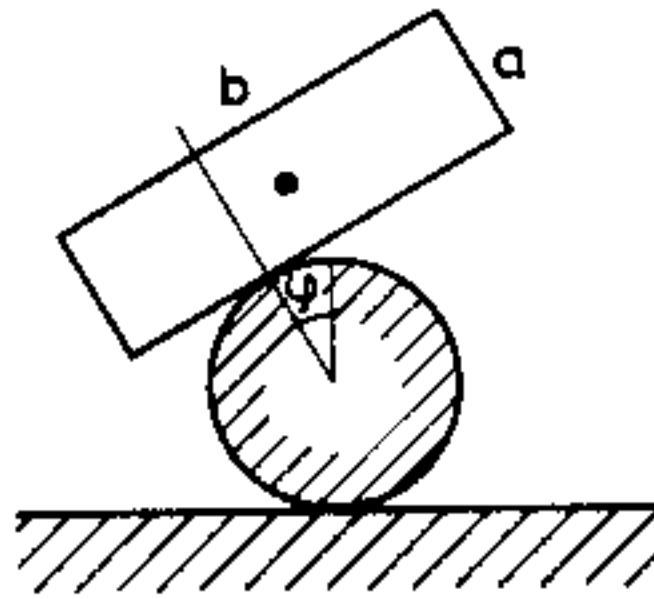
(M a lap tömege).

A $\varphi=0$ helyzet akkor stabil, ha $\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=0} = R - \frac{a}{2} > 0$. A lap mozgásának Lagrange-függvénye (tapadás esetén):

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\varphi}^2 \left\{ R^2 \varphi^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{1}{12} (b^2 + a^2) \right\} - Mg \left\{ R \varphi \sin \varphi + \frac{a}{2} \cos \varphi + R \cos \varphi \right\}$$

(b a lap szélessége). A kis rezgések frekvenciája L -ből:

$$\omega^2 = \frac{12g(R - a/2)}{b^2 + 4a^2}$$



12.48. A félgömb Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{1}{2} \Theta \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgz.$$

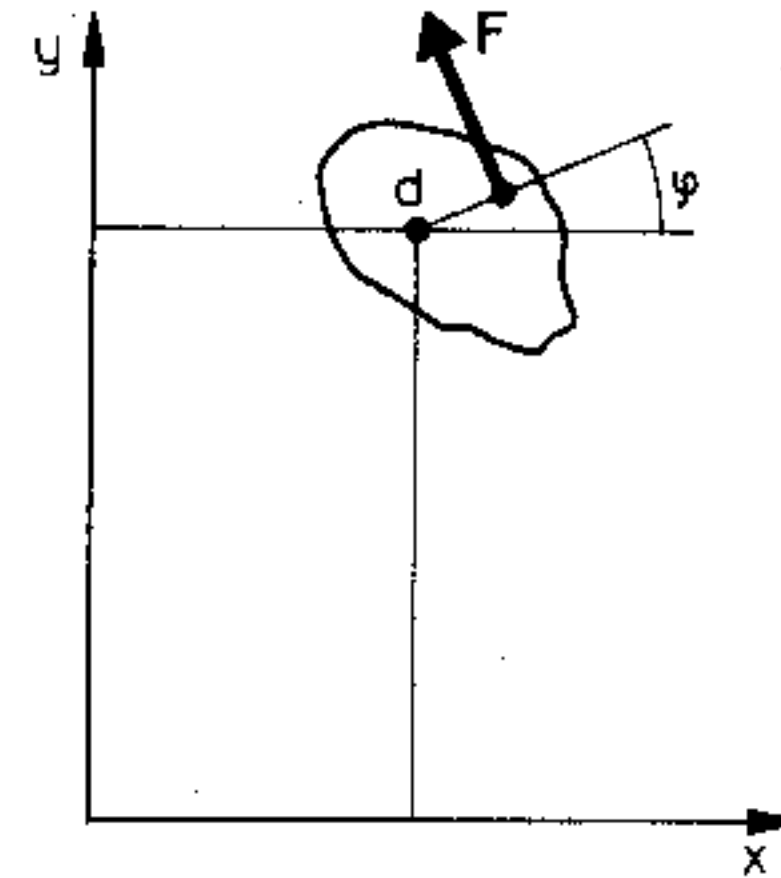
Θ a félgömb tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka: $\Theta = \frac{83}{320} mR^2$, z a tömegközéppont távolsága a vízszintes síktól: $z = R - \frac{3}{8} R \cos \varphi$, $x = \frac{3}{8} R \sin \varphi$, φ pedig a félgömb elfordulása. A kis rezgések frekvenciája: $\omega = \sqrt{\frac{5}{16} \frac{g}{R}}$

12.49.

$$L = \frac{MR^2}{18} \left(\frac{243}{18} - 4 \cos \varphi \right) \dot{\varphi}^2 - \frac{2}{9} MgR(1 - \cos \varphi).$$

12.50. A test tömegközéppontjának (x, y) helyvektorára és a φ szögelfordulásra fennálló mozgásegyenletek:

$$m\ddot{x} = -F \sin \varphi, \quad m\ddot{y} = F \cos \varphi, \quad \Theta \ddot{\varphi} = Fd.$$



Az utolsót integrálva: $\varphi = \frac{Fd}{2} t^2$ (ha $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$), majd az előzőkbe helyettesítve:

$$\dot{x} = -\frac{F}{m} \sqrt{\frac{2}{F \cdot d}} \int_0^{t\sqrt{\frac{F \cdot d}{2}}} \sin^2 \tau d\tau = -\frac{1}{m} \sqrt{\frac{F \pi}{d}} S\left(t \sqrt{\frac{Fd}{2}}\right),$$

$$\dot{y} = \frac{F}{m} \sqrt{\frac{2}{F \cdot d}} \int_0^{t\sqrt{\frac{Fd}{2}}} \cos^2 \tau d\tau = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{F \pi}{d}} C\left(t \sqrt{\frac{Fd}{2}}\right).$$

Itt $C(u)$, $S(u)$ az ún. Fresnel-függvények. Milyen lesz a mozgás $t \rightarrow \infty$ esetén?

12.51. Írjuk le a rendszert a tengellyel együtt forgó koordináta-rendszerből! ϑ kihajlási szög esetén az eredő centrifugális erőt integrálással kapjuk:

$$F_{cf} = \int \rho x \sin \vartheta \omega^2 dx = \frac{1}{2} m l \omega^2 \sin \vartheta.$$

Az eredő forgatónyomaték az

$$M_{cf} = \int \rho x^2 \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta dx = \frac{1}{3} m l^3 \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

centrifugális forgatónyomaték és a súlyból származó

$$M = -m g \frac{l}{2} \sin \vartheta$$

forgatónyomaték eredője. Ebből a stacionárius helyzet ϑ_0 kihajlási szögére

$$\cos \vartheta_0 = \frac{3g}{2l\omega^2},$$

ami csak $\omega > \omega_k \equiv \sqrt{3g/(2l)}$ esetén valósulhat meg. $\omega < \omega_k$ -ra a $\vartheta = 0$ a stacionárius helyzet.

Megjegyzés: ϑ_0 egyszerűen megkapható az

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \omega^2) + m g \frac{l}{2} \cos \vartheta$$

Lagrange-függvényből is. A csuklóban fellépő erő: $F =$

$$= \frac{1}{2} m l \omega^2 \sqrt{1 + \frac{7}{4} \frac{g^2}{l^2 \omega^4}}.$$

12.52.

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{g}{(m_1 - m_2)} \left(\frac{m_1}{\cos \vartheta} - \frac{m_2}{\sin \vartheta} \right).$$

Ha $m_1 > m_2$, akkor $\operatorname{tg} \vartheta > m_2/m_1$ kell legyen.

13. Mozgás leírása gyorsuló és forgó koordináta-rendszerben

13.1. Az a gyorsulással mozgó autóban ülő megfigyelő — ma tehetlenségi erő felléptét észleli. Így a szabadon eső kő mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} = ma, \quad m\ddot{y} = mg,$$

azaz a bent ülő megfigyelő szerint a kő $a' = \sqrt{a^2 + g^2}$ gyorsulással egyenletesen gyorsuló mozgást végez a függőlegessel

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{g}$ szöget bezáró egyenes mentén.

13.2. m_1 és m_2 nyugalomban van M -hez viszonyítva, ha vízszintes gyorsulásuk a -val egyenlők és m_2 függőleges irányban nem mozog. Ha a kótélben K erő ébred, akkor ennek feltétele:

$$K = m_1 a, \quad K - m_2 g = 0.$$

Innen

$$a = \frac{m_2}{m_1} g.$$

13.3. Az ékhez rögzített, A gyorsulással mozgó koordináta-rendszerben a mozgásegyenletek a következők:

$$ma = mg \sin \alpha + mA \cos \alpha,$$

$$K + mA \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0,$$

$$K \sin \alpha - MA = 0,$$

ahol K a lejtő és a test között fellépő kényszererő nagysága. A gyorsulások:

$$A = \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g, \quad a = \frac{(M + m) \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g.$$

A m tömegű test nyugvó koordináta-rendszerben mért gyorsuláskomponensei:

$$a'_x = \frac{M \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g, \quad a'_y = \frac{(M + m) \sin^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g,$$

amiből következik, hogy m pályája $(1 + m/M) \operatorname{tg} \alpha$ iránytangensű egyenes.

13.4. A kocsival együtt mozgó, A gyorsulású koordináta-rendszerben a mozgásegyenletek:

$$m_2 a = K + m_2 A,$$

$$m_1 a = m_1 g - K,$$

$$F - m_1 A = 0,$$

$$K - F - MA = 0,$$

ahol K a kötél erő, F a kocsi és a m_1 tömegű test közötti kényszererő nagysága. Ebből

$$A = \frac{m_1 m_2}{m_1(m_1 + m_2 + M) + m_2(m_1 + M)} g,$$

$$a = \frac{m_1(m_1 + m_2 + M)}{m_1(m_1 + m_2 + M) + m_2(m_1 + M)} g.$$

A $m_2 \rightarrow \infty$ határesetben a m_2 tömegű test áll ($a = A$), s a kocsi kicsúszik alóla (súrlódás nincs), m_2 tehát merev fallal helyettesíthető:

13.5. A lejtővel együtt mozgó koordináta-rendszerben

$$ma = mg \sin \alpha - K + mA \cos \alpha = -mg \cos \alpha + K + mA \sin \alpha,$$

$$F_1 + mA \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0,$$

$$F_2 - mA \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0,$$

$$K(\sin \alpha - \cos \alpha) + F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \alpha - MA = 0.$$

Itt K jelöli a kötél erőt, F_1 a bal oldali, F_2 a jobb oldali test és a

lejtő között fellépő kényszererőt. A M tömegű lejtő gyorsulása:

$$A = \frac{m(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{2M + 3m - 2m \sin \alpha \cos \alpha} g.$$

A m tömegű testek gyorsulása:

$$a = \frac{(2m + M)(\sin \alpha - \cos \alpha)}{2M + 3m - 2m \sin \alpha \cos \alpha} g.$$

A bal oldali test akkor nem emelkedik föl, ha $F_1 \geq 0$, ami

$$\operatorname{tg} \alpha \leq 3 + 2M/m$$

esetén teljesül.

13.6. Vegyük föl a koordináta-rendszert úgy, hogy az origó a tömegközéppontban legyen, s a z -tengely függőlegesen lefelé mutasson. A felső tömeg kezdeti koordinátája $z_{10} = -(l + g/\omega_0^2)/2$, az alsóé $z_{20} = -z_{10}$. A tömegközépponthez rögzített koordináta-rendszerben a fonál elégetése után a mozgásegyenletek:

$$\ddot{z}_1 = -2\omega_0^2(z_1 + l/2); \quad \ddot{z}_2 = -2\omega_0^2(z_2 - l/2).$$

Itt fölhasználtuk, hogy a megfeleztett rugó direkciós ereje kétszerese az eredetinek. A kezdőfeltételhez tartozó megoldást a nyugvó koordináta-rendszerbe visszatranszformálva:

$$z'_1 = \frac{1}{2} \left[gt^2 - l - \frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t \sqrt{2}) \right],$$

$$z'_2 = \frac{1}{2} \left[gt^2 + l + \frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t \sqrt{2}) \right].$$

13.7. Ha a lift áll, az egyensúly feltétele:

$$mg = A \cdot x_{Qr} g,$$

innen a bemerülés mélysége:

$$x = \frac{m}{A_{Qr}}.$$

Ha a lift a gyorsulással mozog, akkor együttmozgó rendszerben a testre ható külső erő $m(g+a)$ nagyságú, ugyanakkor a folyadék hidrosztatikai nyomásának változása a magassággal:

$$p = \rho(g+a)h.$$

Az egyensúlyi egyenlet ezért:

$$m(g+a) = \rho(g+a)x A,$$

amiből a bemerülés mélysége:

$$x = \frac{m}{A\rho}.$$

Így tehát a bemerülés mélysége nem változik, ha a lift mozogni kezd.

13.8. Az inga mozgásának jellege nem változik, csak a rezgés frekvenciája nő meg $\omega = \sqrt{\frac{a'}{l}}$ értékre, $a' = \sqrt{a^2 + g^2}$.

13.9. A korongon ülő megfigyelő számára a test spirálisan halad lefelé. A forgó rendszerben a testre függőleges irányban mg erő hat, vízszintes irányban befelé a $2m\omega v = 2mr\omega^2$ Coriolis-erő, kifelé $mr\omega^2$ centrifugális erő hat, így az eredő befelé mutat és $mr\omega^2$ nagyságú; ez éppen akkora, amekkora a körpályán tartáshoz szükséges.

13.10. A test súlyának és a Coriolis-erőnek az eredőjével nyomja a cső falát. Minthogy súrlódás nincs, ezek a sugárirányú mozgást nem befolyásolják, tehát a csővel együtt forgó koordináta-rendszerben a mozgásegyenlet (r a tengelytől mért távolság):

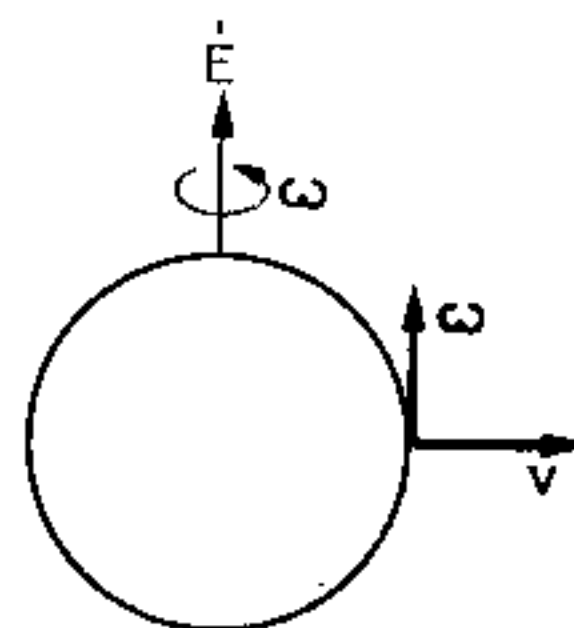
$$m\ddot{r} = m\omega^2 r.$$

Ennek az $r(0)=0$, $\dot{r}(0)=v_0$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldása $r(t) = \frac{v_0}{\omega} \text{sh } \omega t$.

13.12. A horgony felemelése során $F = -2m\omega \times v$ Coriolis-erő hat a horgonyra (és ezért a hajóra is); ez fogja mozgásba hozni a hajót, az ábrából láthatóan nyugatra. Ha v sebességgel húzzák a

horgonyt, a hajó gyorsulása $a = 2m\omega v/(m+M)$ (m a horgony, M a hajó tömege). Az árbcoc h magasságára $h = \int_0^T v dt$. A hajó sebessége, ha már felért a horgony:

$$V_h = \int_0^T a dt = \frac{2m\omega}{m+M} h = 4,9 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



13.13. A forgó Földhöz rögzített koordináta-rendszerben fellépő tehetetlenségi erők a Föld

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad/nap}}{86400 \text{ s/nap}} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

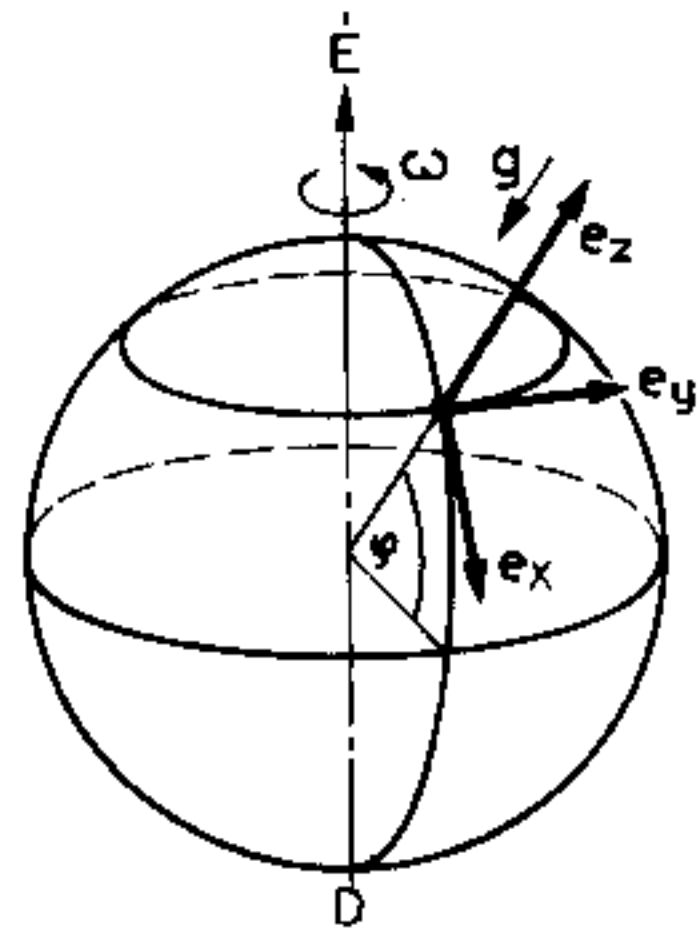
szögsebességétől függenek. Ennek kicsiny volta miatt első közelítésben csak az ω -ban lineáris tagot – a Coriolis-erőt – tartjuk meg, így a test gyorsulása:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (1)$$

Koordináta-rendszerünket válasszuk az ábra szerint és a szóban forgó távolságokon vegyük \mathbf{g} -t állandónak. Az északi félgömbön $\omega_x = -\omega \cos \varphi$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \omega \sin \varphi$ és ω -ban nulladrendig: $g_x = g_y = 0$; $g_z = -g$. (1)-et ω -ban nulladrendig a sebességre megoldva kapjuk, hogy $\dot{x} = \dot{y} = 0$; $\dot{z} = -gt$. Így $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ ω -ban elsőrendben: $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\omega g t \cos \varphi \mathbf{e}_y$; azaz (1)-re ebben a rendben

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 2\omega g t \cos \varphi, \quad \ddot{z} = -g. \quad (2)$$

A második egyenletet az $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ kezdeti feltétellel kétszer integrálva kapjuk, hogy $y(t) = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos \varphi$, az utolsó egyenletből pedig a közismert $z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$ adódik. Így az esési időt a $z(t_0) = 0$ egyenletből kifejezve kapjuk a h magasságból leejtett test y -irányú (keleti) eltérésére:



$$d = \frac{1}{3} \omega \cos \varphi \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \quad h = 100 \text{ m},$$

$$\varphi = 45^\circ \text{ esetén } d \sim 1,55 \text{ cm}.$$

13.14. Vegyük észre, hogy a pálya lefelé eső szakaszához járuló kezdeti feltételek tartalmazzák azt a vízszintes irányú sebességet, melyet a test a felfelé mozgás során szerzett. Ezt figyelembe véve, az előző feladat megfontolásait alkalmazva kapjuk, hogy a test nyugatra, a kiindulási ponttól $\frac{4}{3} \omega_F \sqrt{8h^3/g} \cos \varphi$ távolságra fog Földet érni. (ω_F a Föld szögsebessége, h az emelkedés magassága).

13.15. A súlykülönbség ω_F -ben elsőrendben abból ered, hogy a mozgó test által észlelt effektív nehézségi gyorsulás – mely ebben a közelítésben a nehézségi gyorsulás és a Coriolis-gyorsulás függőleges komponensének összege – különböző a keleti, ill. a nyugati irányú mozgás során. A 13.13. feladat megoldásának koordináta-rendszerét használva, $g_{\text{eff}} = g - 2\omega \times v|_z$, és v_{kelet}

$= (0, v, 0)$; $v_{\text{nyugat}} = (0, -v, 0)$. Így a φ északi szélességű kör mentén $g_{\text{eff}}^{\text{K}} = g + 2\omega_F v \cos \varphi$, illetve $g_{\text{eff}}^{\text{Ny}} = g - 2\omega_F v \cos \varphi$, tehát a kelet felé mozgó autó lesz nehezebb. A súlykülönbség: $\Delta G = m \Delta g_{\text{eff}} = 4m\omega_F v \cos \varphi$. A szám adatokkal $\Delta G = 2,92 \text{ N}$.

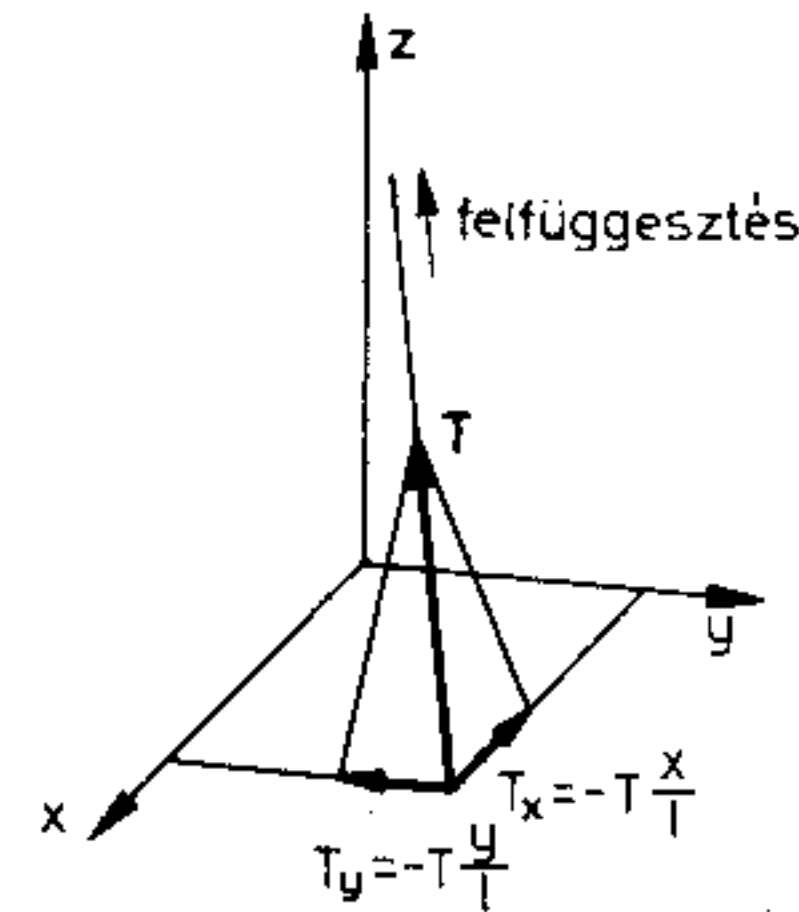
13.16. Válasszuk koordináta-rendszerünket úgy, hogy z mutasson a helyi függőleges irányába és a – nagy magasságban levő – felfüggesztési pont legyen a z -tengelyen. Elegendően kis amplitúdójú mozgás esetén (amplitúdó \ll inga hossza) a függőleges irányú sebesség, \dot{z} , elhanyagolható az xy vízszintes síkbeli \dot{x} , \dot{y} sebességek mellett. A mozgásegyenlet

$$\mathbf{a} = g + \frac{\mathbf{T}}{m} - 2\omega \times \mathbf{v}. \quad (1)$$

Itt \mathbf{T}/m a fonálban ébredő feszültség által létrehozott gyorsulás. Kis kitérésekre az ábra szerint

$$T_x = -T \frac{x}{l}, \quad T_y = -T \frac{y}{l}, \quad T_z = T.$$

Ha az inga φ északi szélességű pontban van, akkor (l. az előző feladatokat) ω_F^2 -rendig: $g_x = g_y = 0$, $g_z = -g$; $\omega_x = -\omega_F \cos \varphi$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \omega_F \sin \varphi$. Ezért ($\dot{z} = 0$ esetén) a Coriolis-gyorsulás-



ra kapjuk, hogy

$$2\omega \times \mathbf{v} = 2\omega_F(-\dot{y} \sin \varphi, \dot{x} \sin \varphi, -\dot{y} \cos \varphi).$$

Így az xy síkbeli mozgásegyenletek:

$$\ddot{x} = -\frac{T}{m} \frac{x}{l} + 2\dot{y}\omega_F \sin \varphi, \quad \ddot{y} = -\frac{T}{m} \frac{y}{l} - 2\dot{x}\omega_F \sin \varphi. \quad (2)$$

Kis kitérésekre $T \sim mg$, és legyen $\alpha^2 = \frac{g}{l}$. (2) második egyenletének i -szeresét az elsőhöz adva és bevezetve a komplex $q = x + iy$ függvényt:

$$\ddot{q} + 2i\omega_F \dot{q} \sin \varphi + \alpha^2 q = 0. \quad (3)$$

Ez a csillapított harmonikus oszcillátor egyenlete, tisztán imaginárius „csillapítással”.

Megoldása:

$$q(t) = \exp\{-it\omega_F \sin \varphi\} \{A \exp(t \sqrt{-\alpha^2 - \omega_F^2 \sin^2 \varphi}) + B \exp(-t \sqrt{-\alpha^2 - \omega_F^2 \sin^2 \varphi})\}. \quad (4)$$

Mint hogy α az inga (perturbálatlan) frekvenciája ($\alpha \gg \omega_F$), így (4)-ből

$$q(t) = \exp\{-it\omega_F \sin \varphi\} \{Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t}\} = \exp\{-it\omega_F \sin \varphi\} \tilde{q}(t). \quad (5)$$

Itt $\tilde{q}(t)$ a perturbálatlan ingamozgás $\ddot{\tilde{q}} + \alpha^2 \tilde{q} = 0$ egyenletének megoldása. (5)-ben kiírva a valós és képzetes részekre vonatkozó egyenletet:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{x}(t) \cos [t\omega_F \sin \varphi] + \tilde{y}(t) \sin [t\omega_F \sin \varphi], \\ y(t) &= -\tilde{x}(t) \sin [t\omega_F \sin \varphi] + \tilde{y}(t) \cos [t\omega_F \sin \varphi]. \end{aligned} \quad (6)$$

(6)-ból látjuk, hogy a perturbált mozgás (x, y) helyvektorát a perturbálatlan (\tilde{x}, \tilde{y}) -ből $\beta = t\omega_F \sin \varphi$ szögű forgatással kapjuk meg; tehát a Föld forgásának hatása abban nyilvánul meg, hogy az inga lengési síkja $\omega_F \sin \varphi$ szögsebességgel elfordul.

13.17. a) Nem. Néhány lehetséges ok: a három ingára (1) a Coriolis-gyorsulás különböző; (2) $a - v^2 \mathbf{r}/r^2$ centripetális gyorsulás különböző; (3) a gravitációs erő gyengül a magassággal; (4) fel- és leszálláskor a repülőgépekkel gyorsítani kell; (5) relativisztikus effektusok ($t = \tau/\sqrt{1-v^2/c^2}$).

b) Az előző okok közül (1) és (2) a legjelentősebb. Ha vonatkoztatási rendszerül a Föld középpontjához rögzített inerciarendszert választjuk, akkor (1) nem lép fel. A Föld felszínéhez közeli, ebben az inerciarendszerben az Egyenlítő mentén ω szögsebességgel mozgó testre ható effektív nehézségi gyorsulás:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\text{eff}} &= -\frac{GM}{R^3} \mathbf{R} - \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) = \left(-\frac{GM}{R^2} + \omega^2 R \right) \frac{\mathbf{R}}{R} = \\ &= -g \frac{\mathbf{R}}{R}, \end{aligned}$$

azaz

$$g = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R = g_0 - \omega^2 R.$$

Az ingaóra lengésideje $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_i}}$, ha g_i az effektív nehézségi gyorsulás az inga helyén. A repülőtéren maradó ingára

$$g_R = g_0 - \omega_F^2 R = g;$$

a Nyugatra repülő inga inerciarendszerbeli szögsebessége 0 (a Föld kelet felé forog!), így

$$g_{\text{Ny}} = g_0 = g + \omega_F^2 R;$$

a K felé repülő inga szögsebessége pedig $2\omega_F$, így

$$g_K = g_0 - 4\omega_F^2 R = g - 3\omega_F^2 R.$$

Figyelembe véve, hogy $\omega_F^2 R \ll g$, $\omega_F^2 R/g$ -ben elsőrendben elegendő számolni:

$$T_K = T_R + \frac{3}{2} T_R \frac{\omega_F^2 R}{g}; \quad T_{\text{Ny}} = T_R - \frac{1}{2} T_R \frac{\omega_F^2 R}{g}.$$

Látjuk, hogy a K ingaóra késik, a Ny pedig siet a repülőtéren maradhoz képest. $R_F = 6 \cdot 10^6$ m-rel számolva kapjuk, hogy a visszatéréskor a K óra 420 s-ot késni, a Ny óra 140 s-ot sietni fog.

13.18. Legyen K' inerciarendszer és K pedig ω -val forgó rendszer úgy, hogy origóik egybeesnek: Ekkor a két rendszer között fennáll, hogy $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Inerciarendszerben a Lagrange-függvény:

$$L' = \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 - V(\mathbf{r}')$$

Ezért az ω szögsebességgel forgó rendszerben:

$$L = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 - V(\mathbf{r}).$$

13.19. Az előző feladat eredménye szerint a koronggal együtt forgó koordináta-rendszerben az m tömeg Lagrange-függvénye:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\omega(x\dot{y} - \dot{x}y) - \frac{m}{2} \left[\left(\frac{2k_1}{m} - \omega^2 \right) x^2 + \left(\frac{2k_2}{m} - \omega^2 \right) y^2 \right].$$

Az $\omega_1^2 = \frac{2k_1}{m} - \omega^2$ és $\omega_2^2 = \frac{2k_2}{m} - \omega^2$ jelölésekkel a mozgásegyenlet:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x - 2\omega \dot{y} = 0,$$

$$\ddot{y} + \omega_2^2 y + 2\omega \dot{x} = 0.$$

A megoldásokat $x = Ae^{i\Omega t}$, $y = Be^{i\Omega t}$ alakban keresve, Ω -ra kapjuk:

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 4\omega^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 4\omega^2}{4} - 4\omega_1^2 \omega_2^2}.$$

14. Szórásszámítás

14.1. a) Egyszerű geometriai megfontolás szerint a részecskék eltérülési szöge (ϑ) kétszerese annak a szögnek, melyet a forgásfelület kérdéses pontbeli érintősíkja a z -tengellyel bezár. Ezért

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{dq}{dz} = \frac{b}{a} \cos \frac{z}{a}.$$

Innét kapjuk, hogy

$$q^2 = b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2},$$

és

$$d\sigma = \pi |dq^2| = \frac{a^2 d\Omega}{4 \cos^4 \frac{\vartheta}{2}}.$$

A lehetséges szórási szögek 0-tól ($q \rightarrow b$) $\vartheta_m = 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ ($q \rightarrow 0$)-ig terjednek.

b) Hasonlóan kapjuk, hogy

$$d\sigma = \begin{cases} \frac{b}{4} \left(a \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} - b} \right) \frac{d\Omega}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta}, \\ \text{ha } 0 < \vartheta < \vartheta_m = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right), \\ 0, & \text{ha } \vartheta_m < \vartheta. \end{cases}$$

c)

$$d\sigma = A^{-\frac{2}{n-1}} \left(n \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right)^{\frac{n+1}{n-1}} \frac{d\Omega}{2(n-1) \sin \vartheta \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}.$$

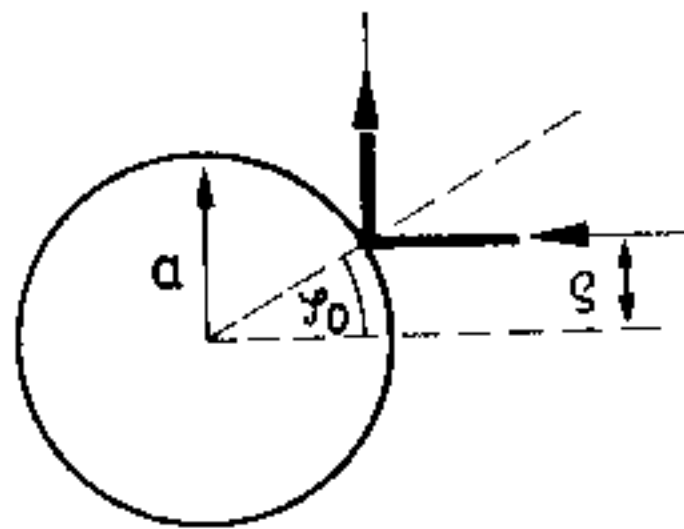
14.2. A gömbön kívül a részecske szabadon mozog, a gömbbe behatolni viszont nem tud, ezért a pályája két egyenes szakaszból tevődik össze, melyek szimmetrikusan helyezkednek el a gömbbel való metszéspontjukon átmenő sugárra. Az ábráról látszik, hogy

$$\varrho = a \sin \varphi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2}.$$

Így

$$d\sigma = 2\pi\varrho(\chi) \left| \frac{d\varrho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi = \frac{a^2}{4} d\Omega,$$

azaz a tömegközépponti rendszerben a szórás izotrop. $d\sigma$ -t a térszög szerint integrálva, a teljes hatáskeresztmetszetre $\sigma = \pi a^2$ adódik, összhangban azzal a ténnyel, hogy az ütközés szempontjából hatásos felület megegyezik a gömb keresztmetszetével.



14.3.

$$d\sigma = \frac{\alpha\pi^2}{E} \frac{\pi - \vartheta}{\vartheta^2(2\pi - \vartheta) \sin \vartheta} d\Omega, \quad \sigma_1 = \infty.$$

14.4. Ha $E > V$, akkor

$$d\sigma = \begin{cases} a^2 \left[\frac{n^2 \left(n \cos \frac{\vartheta}{2} - 1 \right) \left(n - \cos \frac{\vartheta}{2} \right)}{\cos \frac{\vartheta}{2} \left(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\vartheta}{2} \right)^2} + 1 \right] d\Omega, & \text{ha } 0 < \vartheta < \vartheta_m \\ 0, & \text{ha } \vartheta_m = 2 \arccos n < \vartheta < \pi; \quad n = \sqrt{1 - V/E}. \end{cases}$$

Ha $E < V$, akkor a szóródó részecske nem tud behatolni az $r < a$ tartományba, és a szórási hatáskeresztmetszet megegyezik a merev gömb esetén kapott eredménnyel (14.2. feladat).

14.5.

$$d\sigma = \frac{R^2(1 + \lambda) d\Omega}{4 \left(1 + \lambda \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2}; \quad \lambda = \frac{4RE(RE + \alpha)}{\alpha^2}.$$

14.6. $E > V$ miatt a részecskék kevéssé térülnek el, így a kisszögű szórás összefüggéseit alkalmazhatjuk (Landau-Lifsic: Mechanika (20.3) és (20.4) egyenletek) a szórási szögre:

$$\Theta_1 = - \frac{2\varrho}{mv_\infty^2} \int_0^\infty \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}} = \frac{2V}{E} \frac{\varrho}{R} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}};$$

és a hatáskeresztmetszetre:

$$d\sigma = \left| \frac{d\varrho}{d\Theta_1} \right| \frac{\varrho(\Theta_1)}{\Theta_1} d\Omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{V} \right)^2 \frac{R^2 d\Omega_1}{\sqrt{1 - E^2 \Theta_1^2 / V^2}}$$

(természetesen Θ_1 -re fennáll a $0 < \Theta_1 < \frac{E}{V}$ egyenlőtlenség).

14.7. Ha x távolságban az intenzitás $I(x)$, akkor a következő dx vastagságú szakaszon áthaladva, a nyelők miatt az intenzitás $I(x)\sigma n dx$ -szel csökken: $dI = -I(x)\sigma n dx$. Innen: $I(x) = I(0) \exp(-\sigma n x)$.

14.8. A hatáskeresztmetszet definíciója szerint egy szórócentrumon Δt idő alatt $dN = I\sigma \Delta t$ számú reakció játszódik le, ha a centrumra eső intenzitás I . Az 1-es nyaláb részecskéire $I = n_2 |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$, és figyelembe véve, hogy a dV térfogatban $n_1 dV$ számú szórócentrum van:

$$dN = n_1 n_2 |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| \sigma \Delta t dV.$$

14.9.

$$F_s = 2\pi m v^2 n \int_0^\pi f(\vartheta) (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

15. Rugalmasságtan

15.1. A deformációs tenzor

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (i, k = 1, 2, 3; x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z).$$

Így

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma}{E} \rho g (l - z); \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\rho g (l - z)}{E};$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0.$$

(Így deformálódik egy l hosszúságú homogén rúd, saját súlya hatására.)

15.2. Ha rugalmas testre tömegerők nem hatnak, akkor az egyensúlyi egyenletek:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \text{grad div } \mathbf{u} = 0.$$

Esetünkben $\text{div } \mathbf{u} = 0$ (a -tól függetlenül), ezért az egyensúlyi egyenletek $\Delta \mathbf{u} = 0$. Ez u_1 -re és u_2 -re automatikusan teljesül, $\Delta u_3 = 2k(2 - a)$, így $a = 2$.

15.3. A deformációs tenzor komponensei

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

szerint függenek az $u_i(\mathbf{x})$ deformációvektortól. Esetünkben ε_{ik} minden eleme 0, kivéve ε_{12} -t (és a szimmetria miatt ε_{21} -et):

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = c.$$

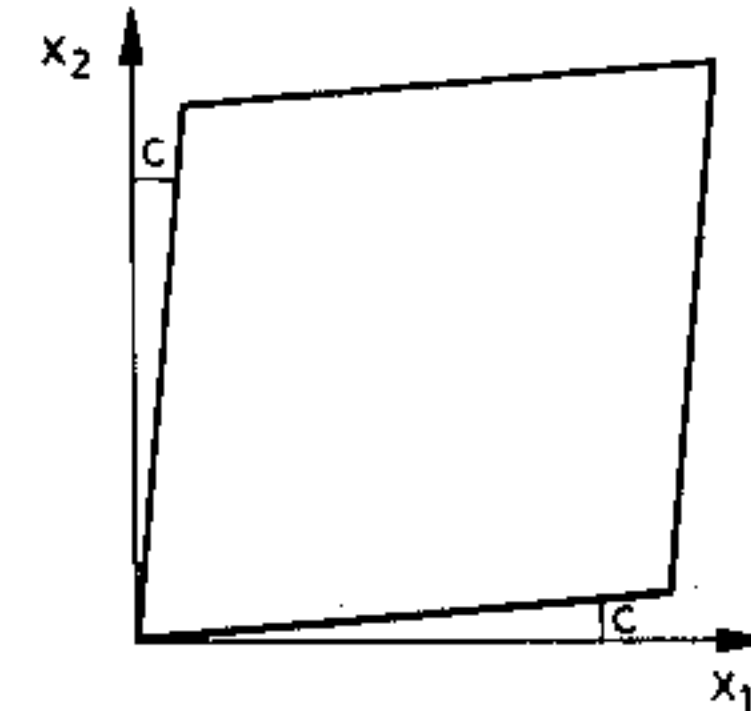
Ezért

$$u_1 = cx_2 + c_1x_2 + b_1x_3 + a_1; \quad u_2 = cx_1 - c_1x_1 + b_2x_3 + a_2;$$

$$u_3 = -b_1x_1 - b_2x_2 + a_3,$$

ahol a_i és b_i , valamint c_1 tetszőleges állandók. A b_i -vel és c_1 -gyel jellemzett \mathbf{u} vektorok a testnek deformációval nem járó forgatását, az a_1, a_2, a_3 integrációs állandók pedig a kocka egészének eltolását írják le, ezért 0-nak választhatjuk őket. Így $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (cx_2, cx_1, 0)$.

$\mathbf{u}(\mathbf{x})$ segítségével meg tudjuk határozni a kocka minden pontjának deformáció utáni helyzetét: $x'_i = x_i + u_i(\mathbf{x})$. A kocka x_1 -, x_2 -, illetve x_3 -tengelyen levő élein fekvő pontok koordinátái deformáció előtt rendre $(t, 0, 0)$; $(0, t, 0)$; $(0, 0, t)$, $0 \leq t \leq A$ (A a kocka oldalhosszúsága); ezért deformáció után rendre a $(t, ct, 0)$; $(ct, t, 0)$; $(0, 0, t)$ pontokba mennek át. Tehát az x_3 -tengelyen fekvő él nem változik, az x_1 - és x_2 -tengelyen fekvő élek pedig az ábra szerint változnak.



15.4. a) A karakterisztikus egyenlet: $(\gamma - \beta)(\gamma^2 - \alpha^2) = 0$.

Innen a sajátértékek: $\gamma = \beta$, $\gamma = \pm \alpha$. Az elsőhöz tartozó főirány $(0, 0, 1)$, a másik kettőhöz pedig $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$. A re-

latív térfogatváltozás: $\frac{\Delta V}{V} = \sum_i \varepsilon_{ii} = \beta$.

b)

$$\sigma_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda\delta_{ik} \sum_l \varepsilon_{ll}; \quad \sum_l \varepsilon_{ll} = \beta,$$

ezért a feszültségtenzor

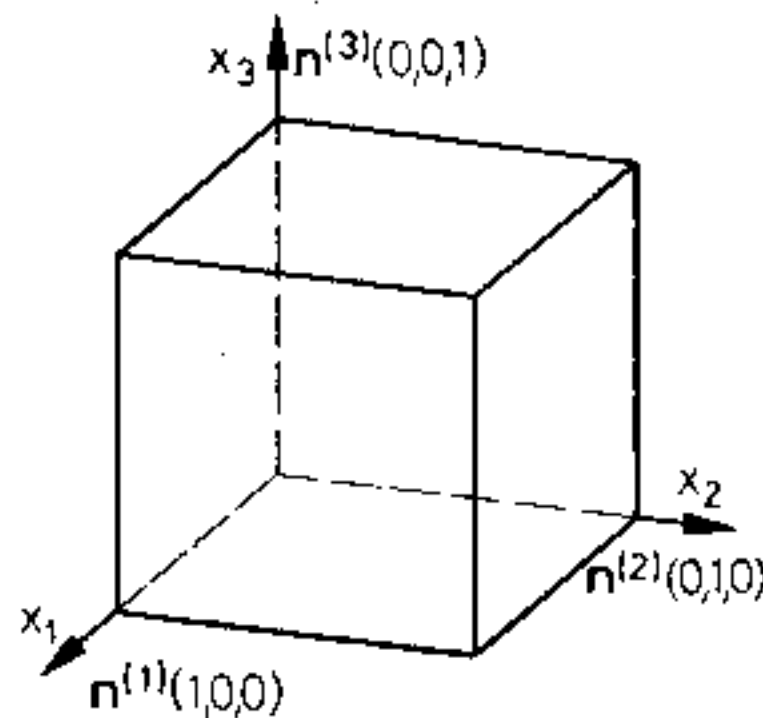
$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda\beta & 2\mu\alpha & 0 \\ 2\mu\alpha & \lambda\beta & 0 \\ 0 & 0 & (2\mu + \lambda\beta) \end{pmatrix}$$

alakú lesz minden pontban.

Az egyensúly feltétele: $\sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0$, ahol g_i a tömeg-

erők által létrehozott gyorsulás. Minthogy $\sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$, g_i is

azonosan 0, azaz a kérdéses deformáció létrejöttéhez nem kellene tömegerők. Az egyensúly feltétele a határokon $\sum_k \sigma_{ik} n_k = P_i$, ahol P_i a felületre alkalmazott feszültség i -edik komponense. Helyezzük hasábunkat a következőképpen a koordináta-rendszerbe:



Az $n^{(1)}$ normálisú felületen az egyensúlyi feltételek:

$$\sigma_{11} = \lambda\beta = P_1; \quad \sigma_{21} = 2\mu\alpha = P_2; \quad P_3 = 0,$$

tehát erre a felületre ható teljes felületi erő

$$\mathbf{F}^{(1)} = (\lambda\beta a^2, 2\mu\alpha a^2, 0).$$

Az evvel szemközti oldalon a normális vektor $(-1, 0, 0)$, ezért minden komponens (-1) -gyel szorzódik az előző eredményhez képest. Hasonló módon számolva kapjuk a

második, $n^{(2)}$ normálisú felületre: $\mathbf{F}^{(2)} = (2\mu\alpha a^2, \lambda\beta a^2, 0)$, és az $n^{(3)}$ normálisúra: $\mathbf{F}^{(3)} = (0, 0, (2\mu + \lambda\beta)a^2)$. Látjuk tehát, hogy a kérdéses deformáció megvalósításához a 3-as irányban tiszta húzó, az 1- és 2-es irányban húzó és nyíró feszültségeket kell a kocka felületére kifejteni.

15.5. a) Az egyensúly feltétele a kocka belsejében

$$\sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

itt g_i a tömegerők sűrűsége. Esetünkben

$$\sum_k \frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial \sigma_{2k}}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial \sigma_{3k}}{\partial x_k} = \alpha;$$

tehát $g_i = -\frac{\alpha}{\rho}(1, 1, 1)$, azaz a kockára homogén, $\frac{\alpha}{\rho}$ nagyságú $(-1, -1, -1)$ irányú tömegerő hat.

b) Az egyensúly feltétele a határoló lapokon $\sum_k \sigma_{ik} n_k = P_i$, n_k a

kérdéses lap normálisa, P_i a felületre alkalmazott feszültség i -edik komponense. A kocka $(1, 0, 0)$ normálisú $x_1 = a$ felületén ezért $P_i = \delta_{i1} \alpha a$, és így erre a lapra összesen $F_i = P_i a^2 = \delta_{i1} \alpha a^3$ felületi erő hat. Hasonlóan kapjuk, hogy az $x_2 = a$ felületre $F_i = \delta_{i2} \alpha a^3$; az $x_3 = a$ felületre $F_i = \delta_{i3} \alpha a^3$ erő hat; valamint azt, hogy az $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$ lapokra nem hat erő.

c) A deformált rugalmas testben a df_k felületelemre ható erő:

$$P_i = \sum_k \sigma_{ik} df_k. \text{ Esetünkben } df_k = \frac{df}{\sqrt{2}} (1, 0, 1); \text{ így}$$

$$P_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} x_1 df; \quad P_2 = 0; \quad P_3 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} x_3 df$$

$$(df = a dx_1 \sqrt{2}).$$

Az s síkra ható erő komponensei: $F_i = \int_S P_i df$; így

$$F_1 = \int_0^a \frac{\alpha}{\sqrt{2}} x_1 a dx_1 \sqrt{2} = \alpha \frac{a^3}{2}; \quad F_2 = 0; \quad F_3 = \alpha \frac{a^3}{2}.$$

(F_3 kiszámításakor felhasználtuk, hogy az S sík egyenlete $x_1 + x_3 = a$ alakú.)

15.6. A $\sigma_{ik} = \text{állandó} \times \delta_{ik}$ próbafüggvény megoldása az egyensúlyi egyenleteknek. A komponensek meghatározását speciális normálisú felületi pontokban végezhetjük el.

Pl.:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{-ra} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Innen $\sigma_{xx} = -p$, $\sigma_{yx} = 0$, $\sigma_{zx} = 0$ adódik. Így végül is a

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \text{ kifejezést kapjuk.}$$

A $\sigma_{ik} = 2\mu\epsilon_{ik} + \lambda\delta_{ik} \sum_l \epsilon_{ll}$ egyenletből azt találjuk, hogy ϵ_{ik} is diagonális alakú: $\epsilon_{ik} = \epsilon\delta_{ik}$. ϵ értékét a $\sum_i \sigma_{ii} = -3p = (2\mu + 3\lambda) \sum_i \epsilon_{ii}$ miatt fennálló $-p = 2\mu\epsilon + 3\lambda\epsilon$ egyenletből kapjuk:

$\epsilon = -\frac{p}{2\mu + 3\lambda}$. A gömb relatív térfogatváltozása egyrészt $-\frac{3p}{2\mu + 3\lambda}$, másrészt pedig a sugárváltozással kifejezve $\frac{2\Delta R}{R}$;

azaz $\frac{\Delta R}{R} = -\frac{p}{2\mu + 3\lambda}$; tehát a deformációvektor

$$\mathbf{u} = -\frac{p}{2\mu + 3\lambda} \mathbf{r}.$$

15.7.

$$\frac{\Delta V}{V} = \sum_i \epsilon_{ii} = \frac{\sum_i \sigma_{ii}}{2\mu + 3\lambda} = \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \left(-\frac{F_1}{bc} - \frac{F_2}{ac} - \frac{F_3}{ab} \right).$$

A deformációs tenzor

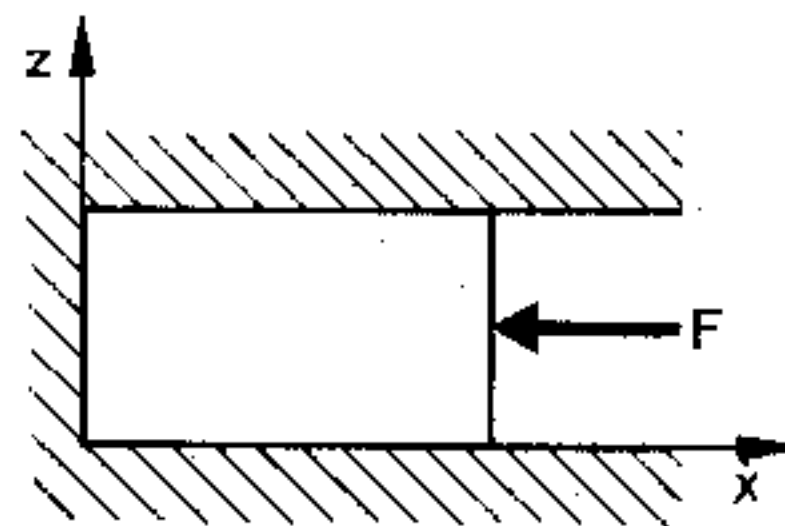
$$\epsilon_{11} = -\frac{1}{2\mu} \frac{F_1}{bc} - \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\Delta V}{V}; \quad \epsilon_{22} = -\frac{1}{2\mu} \frac{F_2}{ac} - \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\Delta V}{V};$$

$$\epsilon_{33} = -\frac{1}{2\mu} \frac{F_3}{ab} - \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\Delta V}{V}; \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0.$$

A nyomott lapok elmozdulásai rendre: $a\epsilon_{11}$, $b\epsilon_{22}$, $c\epsilon_{33}$; a csúcsok elmozdulása ezekből a Pitagorasz-tétel segítségével számolható.

15.8. $\frac{\Delta V}{V} = \frac{-\sqrt{3}P}{2\mu + 3\lambda}$; a csúcsok elmozdulása pedig $-\frac{aP}{\sqrt{6}(2\mu + 3\lambda)}$.

15.9. A tömegerők hiánya miatt az egyensúlyi egyenletet $\left(\sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \right)$ a határfeltételeknek megfelelő állandó σ_{ik} -val próbáljuk meg kielégíteni. A merev fal és a hasáb közötti súrlódás hiánya miatt a nyírófeszültségek (σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz}) eltűnnek. A hasáb



(1, 0, 0) normálisú lapjára $\sigma_{xx} = -F/A$. (A a hasáb keresztmetszete.) σ_{yy} -t és σ_{zz} -t abból a feltételből kapjuk, hogy – a merev fal miatt – y és z irányában nincs hosszváltozás, tehát $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 0$. Az általános $\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left(\epsilon_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \delta_{ik} \sum_l \epsilon_{ll} \right)$ össze-

függésben most $\sum_i \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{xx}$; így az $i=k=1$ egyenletből $\varepsilon_{xx} =$
 $= -\frac{F(1-2\sigma)(1+\sigma)}{A E(1-\sigma)}$; ezt $i=k=2, 3$ -ba helyettesítve kap-

juk, hogy $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\frac{F}{A} \frac{\sigma}{1-\sigma}$. A hasáb hosszváltozása

$$l \varepsilon_{xx} = -\frac{Fl}{AE} \frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{1-\sigma}$$

kisebb, mint akkor, ha nincs beszorítva $\left(-\frac{Fl}{AE}\right)$.

15.10. A rúd elhanyagolható vastagsága miatt a probléma egydimenzióssá válik. Ha a z -tengelyt felfelé irányítjuk, az egyensúlyi egyenlet: $\frac{d\sigma}{dz} - \rho g = 0$. (Itt σ a rúd feszültsége, g a nehézségi

gyorsulás.) Ennek a $\sigma(z=l)=0$ peremfeltételt kielégítő megoldása: $\sigma(z) = -\rho g(l-z)$. A deformációk és feszültségek közötti összefüggés most $\frac{du}{dz} = \frac{\sigma}{E}$, innen az $u(0)=0$ feltételnek eleget

tevő deformáció „vektor” $u(z) = -\frac{\rho g}{E} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right)$.

A rúd hosszváltozása: $u(l) = -\rho g l^2 / (2E)$.

15.11. $\frac{d\sigma}{dz} - \rho g = 0$ az egyensúlyi egyenlet. Ha a pálca hossza nem változik, innen $\sigma(z) = \sigma(0) + \rho g z$. A deformációk és feszültségek közötti összefüggésből:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\sigma}{E}, \quad \text{ezért} \quad u(z) = \frac{1}{E} \left(\sigma(0)z + \rho g \frac{z^2}{2} \right).$$

A határfeltételek: $u(0)=0$, $u(l)=0$. Az első automatikusan teljesül; a másodikból $\sigma(0) = -\rho g \frac{l}{2}$, azaz $\sigma(z) = \rho g \left(z - \frac{l}{2} \right)$.

Tehát a palcát $A\sigma(l) = A\rho g \frac{l}{2}$, azaz a fele súlyának megfelelő erővel kell húzni.

15.12. Nagyon vékony rúdnál a haránt-összehúzódat elhanyagolhatjuk; ekkor a rúdban ébredő feszültség és a deformáció kapcsolata: $\sigma = E \frac{du}{dx}$. Itt x a rúddal együtt forgó koordináta-

rendszerben a rúd végétől mért távolság. A tömegereő-sűrűséget az $x\omega^2$ centripetális gyorsulás adja; így az egyensúlyi egyenlet: $E \frac{d^2u}{dx^2} = -\rho x \omega^2$. Ehhez a $\sigma(l) = E \frac{du}{dx}(l) = 0$ és az

$u(0)=0$ peremfeltételek tartoznak (az első azt fejezi ki, hogy a rúd másik végén nem hat erő, a második pedig azt, hogy a befogott vég nem mozdulhat el); így

$$u(x) = -\frac{\omega^2 \rho}{6E} x^3 + \frac{\omega^2 \rho}{2E} lx^2.$$

15.13. Legyen ΔF a test lefékezésekor a húrban ébredő erő, ΔL pedig a húr megnyúlása. A Young-törvény szerint $\Delta F/A = E\Delta L/L$. A maximális ΔL -et az energiamegmaradásból határozhatjuk meg:

$$mg(L + \Delta L) = \frac{A}{2} E \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 L. \quad \text{Innen} \quad \frac{\Delta L}{L} = \frac{mg}{AE} + \sqrt{\left(\frac{mg}{AE} \right)^2 + \frac{2mg}{AE}}$$

A húr akkor nem szakad el, ha $\Delta F/A < T$, azaz ha $E < \frac{AT^2}{2mg} - T$.

15.14. A fedőlaptól z távolságban legyen az oszlop sugara $r(z)$. Ebben a magasságban a nyomás

$$p = \frac{G}{r^2 \pi} + \frac{\rho g}{r^2 \pi} \int_0^z r^2(s) \pi ds = \text{állandó.}$$

Bevezetve az $f(z) = \int_0^z r^2(s) \pi ds$ függvényt, ez a $p = \frac{G + \rho g f(z)}{f'(z)}$

alakba írható. Innen $f(z) = A e^{\frac{\rho g z}{p}} - \frac{G}{\rho g}$ (integrációs állandó).

$r(z) = \sqrt{f'(z)/\pi}$; az $r(0)=r_0$ kezdeti feltétellel: $r(z) = r_0 \exp\left(\frac{\rho g z}{2p}\right)$.

15.15. Legyen a folyadék h magasságban a henger fölött, és válasszuk xy síknak a folyadék felszínét! A $\sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -\rho g_i$ egyensúlyi egyenletet írjuk fel hengerkoordinátákban! ($g_\varphi = g_\theta = 0; g_z = g$.) A forgási szimmetria miatt feltehetjük, hogy φ -től semmi sem függ és u_φ is 0. A peremfeltételek:

$$\sigma_{zz}(z=h) = -\rho_0 g h, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(\varphi=R, z) = -\rho_0 g z.$$

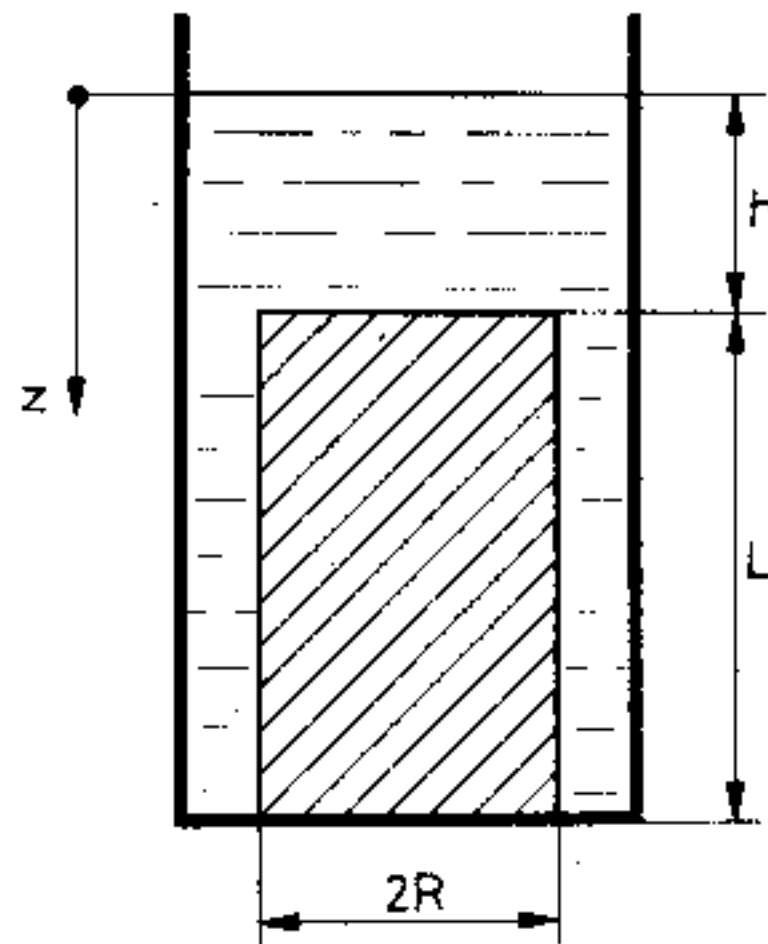
Az egyensúlyi egyenletek ezeket kielégítő megoldása:

$$\sigma_{zz} = -\rho g(z-h) - \rho_0 g h; \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\rho_0 g z.$$

(Az összes többi $\sigma_{ik} = 0$.) A deformációtenzor komponenseit az

$$u_{ik} = \frac{1}{E} \left[(1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\delta_{ik} \sum_l \sigma_{ll} \right]$$

összefüggésből kapjuk.



15.16. Vezessünk be gömbkoordinátákat és válasszuk origónak a gömb középpontját. Az \mathbf{u} deformáció mindenütt sugárirányú és csak az r változó függvénye; ezért $\text{rot } \mathbf{u} = 0$. Így a $2(1-\sigma) \text{grad div } \mathbf{u} - (1-2\sigma) \text{rot rot } \mathbf{u} = 0$ egyensúlyi egyenlet-

ből azt kapjuk, hogy $\text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} = \text{állandó} = 3a$; azaz $u(r) = ar + b/r^2$ (a és b integrálási állandók). Evvel a deformációvektorral a deformációtenzor komponensei

$$\varepsilon_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = a + \frac{b}{r^3};$$

a sugárirányú feszültség pedig

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)\varepsilon_{rr} + 2\sigma\varepsilon_{\varphi\varphi}] = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}.$$

Az a és b állandókat a határfeltételekből határozzuk meg: $\sigma_{rr} = -p_1$ az $r=R_1$ felületen, és $\sigma_{rr} = -p_2$ az $r=R_2$ felületen. Ezekből

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1-2\sigma}{E}; \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1+\sigma}{2E}.$$

Ha a gömb belsejében a nyomás $p_1 = p$ kívül pedig $p_2 = 0$, akkor a gömbhéj feszültségeloszlása:

$$\sigma_{rr} = \frac{p R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 - \frac{R_2^3}{r^3} \right); \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{p R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 + \frac{R_2^3}{r^3} \right).$$

Ha olyan végtelen kiterjedésű, egyenletes p nyomás alatt álló közeg feszültségeloszlását vizsgáljuk, amelyben R sugarú gömb alakú üreg van, a fenti általános összefüggésben $R_1 = R$, $R_2 = \infty$, $p_1 = 0$, $p_2 = p$, helyettesítendő, és így azt kapjuk, hogy

$$\sigma_{rr} = -p \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = -p \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right).$$

Az üreg határán az érintőleges feszültségek $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = -\frac{3}{2}p$, azaz meghaladják a végtelenben uralkodó nyomást.

15.17. A test egységnyi tömegére ható gravitációs erő $-g\mathbf{r}/R$ (g a gömb felületén mért nehézségi gyorsulás). A deformáció véges

az $r=0$ helyen és tudjuk, hogy az $r=R$ helyen a külső nyomás 0; azaz $\sigma_{rr}(r=R)=0$. Így az egyensúlyi egyenletekből

$$u(r) = -\frac{g\rho R(1-2\sigma)(1+\sigma)}{10E(1-\sigma)} r \left(\frac{3-\sigma}{1+\sigma} - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Vegyük észre, hogy az $R\sqrt{\frac{3-\sigma}{3(1+\sigma)}}$ sugarú gömbfelületen belül az anyag összenyomódik ($\varepsilon_{rr} < 0$), ezenkívül pedig kitágul ($\varepsilon_{\varphi\varphi} > 0$). A gömb középpontjában a nyomás $\frac{3-\sigma}{10(1-\sigma)} g\rho R$.

- 15.18.** Feltételezve, hogy a henger hossza állandó és hosszirányú deformáció nincs, a deformációtenzor nullától különböző komponensei $\varepsilon_{rr} = a - \frac{b}{r^2}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi} = a + b/r^2$. a -t és b -t a határfeltételekből ($\sigma_{rr}=0$ az $r=R_2$, és a $\sigma_{rr} = -p$ az $r=R_1$ helyen) kapjuk:

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}; \quad b = \frac{pR_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1+\sigma}{E}.$$

- 15.19.** Az $\omega^2 \rho r$ centrifugális tömegerő nyilvánvalóan radiális elmozdulást fog okozni. Az egyensúlyi egyenletek – hengerkoordináta-rendszerbeli – radiális egyenlete:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right] = \rho\omega^2 r.$$

Ennek a $\sigma_{rr}(r=R)=0$ feltételt kielégítő megoldása:

$$u_r = \frac{\rho\omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)} r [(3-2\sigma)R^2 - r^2].$$

(Itt E a Young-modulus és σ a Poisson-szám.)

- 15.20.** Legyen a hasáb keresztmetszete A . Ekkor a feszültségtenzor egyetlen, 0-tól különböző komponense $\sigma_{zz} = \frac{F}{A}$. A feszültség- és deformációtenzor közötti összefüggés: $\sigma_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} +$

$+ \lambda\delta_{ik} \sum_i \varepsilon_{ii}$, innen esetünkben $\sum_i \varepsilon_{ii} = \frac{F}{A(2\mu+3\lambda)}$. A hasáb térfogatváltozása:

$$\frac{\Delta V}{V} = \int_V \sum_i \varepsilon_{ii} dV = \frac{F}{A(2\mu+3\lambda)} A \cdot h = \frac{Fh}{2\mu+3\lambda}.$$

- 15.21.** Alkalmazzuk a Gauss-tételt a $\sigma \cdot x$ vektorra:

$$\oint \sum_{ij} (\sigma_{ij} x_j) dF_i = \iiint \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j (\sigma_{ij} x_j) dV = \iiint \sum_i \sigma_{ii} dV.$$

A második egyenlőségben kihasználtuk, hogy tömegerők nem hatnak, ezért $\text{div } \sigma = 0$. Homogén, izotrop anyagra

$$\sum_i \sigma_{ii}(x) = (2\mu+3\lambda) \sum_i \varepsilon_{ii}(x) = (2\mu+3\lambda) \frac{\Delta V}{V}(x).$$

Másrészt a felületi integrál:

$$\oint \sum_{ij} \sigma_{ij} x_j dF_i = \oint \sum_j x_j P_j = F \cdot h,$$

tehát

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{F \cdot h}{2\mu+3\lambda}.$$

- 15.22.** A rúd minden keresztmetszetét M nyomaték terheli, tehát

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{M}{I_z E} \quad (I_z \text{ a keresztmetszet másodrendű nyomatéka}).$$

A befogás miatt $z(0)=z'(0)=0$, így kétszeres integrálással

$$z'(x) = \frac{M}{I_z E} x, \text{ ill. } z(x) = \frac{M}{I_z E} \frac{x^2}{2}. \text{ A rúd lehajlása: } z(l) = \frac{Ml^2}{2I_z E};$$

$$\text{szögelfordulása: } \varphi(l) = z'(l) = \frac{Ml}{I_z E}.$$

- 15.23.** A befogott végtől x távolságban a nyomaték $F(l-x)$, így

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{F(l-x)}{I_z E}. \text{ A befogás miatti } z(0)=z'(0)=0 \text{ kezdeti feltéte}$$

lek figyelembevételével kétszeres integrálás után kapjuk, hogy

$$z(x) = \frac{F}{I_z E} \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

A rúd végének lehajlása:

$$z(l) = \frac{Fl^3}{3I_z E}.$$

- 15.24.** A befogott végtől x távolságban a nyomatékot az x -től a rúd végéig terjedő $(l-x)$ hosszúságú darab súlya által létrehozott forgatónyomaték: $M = G(l-x) \frac{l-x}{2}$ adja. Így a befogás $z(0) = 0 = z'(0)$ kezdeti feltételeivel a hajlítás $\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{G}{2I_z E} (l-x)^2$ egyenletéből azt kapjuk, hogy

$$z(x) = \frac{G}{2I_z E} \left(l^2 \frac{x^2}{2} - l \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right).$$

A rúd lehajlása:

$$z(l) = \frac{Gl^4}{8I_z E}.$$

- 15.25.** Ha a rúd csak az egyik végén van befogva, akkor az előző feladat szerint végpontja $Gl^4/(8I_z E)$ lehajlást és $\frac{Gl^3}{6I_z E}$ szögelfordulást szenved. Ezt a rúdvégén ébredő F reakcióerőnek és M nyomatéknak kell kompenzálni. A 15.22. és 15.23. feladatok megoldása szerint ez a $-\frac{Fl^3}{3I_z E} + \frac{Ml^2}{2I_z E} = -\frac{Gl^4}{8I_z E}$, és a $-\frac{Fl^2}{2I_z E} + \frac{Ml}{I_z E} = -\frac{Gl^3}{6I_z E}$ egyenletek teljesülését jelenti. Ezen egyenletrendszer megoldása:

$$F = \frac{1}{2} Gl, \quad M = \frac{Gl^2}{12}.$$

- 15.26.** A membrán egyensúlyi egyenlete $\sigma \Delta u + F = 0$, ahol σ a membrán feszültsége, F pedig az egységnyi felületre vonatkozó külső erő. Esetünkben $F = \rho gh$ és az egyensúlyi egyenlet polárkoordinátákban:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\rho gh}{\sigma}.$$

Ennek az $r=0$ helyen véges, az $r=R$ helyen az $u(R)=0$ peremfeltételt kielégítő megoldása

$$u = \frac{\rho gh}{4\sigma} (R^2 - r^2).$$

- 15.27.** A húr mozgásegyenlete $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ alakú; itt $a^2 = \frac{\sigma}{\rho}$. A befogás miatt a húr mindkét vége minden időpillanatban nyugalomban marad; az ezt kifejező peremfeltételek: $u(0, t) = 0 = u(l, t)$. A mozgásegyenlet megoldását $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$ szorzatalakban keresve a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = a^2 \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha mindkét oldal állandó; jelölje ezt $-\omega^2$. Így a $\psi''(t) + \omega^2 \psi(t) = 0$ és a $\varphi''(x) + \frac{\omega^2}{a^2} \varphi(x) = 0$ egyenleteket kapjuk. A peremfeltételek miatt $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. A $\lambda^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$ paraméter segítségével a második egyenlet általános megoldása:

$$\varphi(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

A $\varphi(0) = 0$ feltétel miatt $A = 0$, a $\varphi(l) = B \sin \lambda l = 0$ feltétel pedig csak úgy teljesülhet a triviálisól különböző módon, ha $\sin \lambda l = 0$, azaz ha $\lambda = \lambda_m = \frac{m\pi}{l}$ ($m = 1, 2, \dots$ egész szám).

A megfelelő $\varphi_m(x)$ függvények: $\varphi_m = B_m \sin \frac{m\pi}{l} x$ (B_m tetszőleges állandó). Végül az ω és λ közötti összefüggésből kapjuk a keresett sajátfrekvenciákat:

$$\omega_m = a\lambda_m = a \frac{m\pi}{l} = \frac{m\pi}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

15.28. A 15.27. feladat megoldását használva, a húr kitérése általában az

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \omega_n t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \omega_n t \right)$$

alakba írható. Az a_n, b_n együtthatókat a kezdeti feltételek

$$u(x, 0) = F(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = G(x)$$

határozzák meg az

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l dx F(x) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

illetve a

$$b_n = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l dx G(x) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

alakban.

Az a) esetben csak a_2 , a b) esetben csak b_2 különbözik nullától, azaz

$$u(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{l} x \cos \frac{2\pi}{l} t \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad \text{az a), és}$$

$$u(x, t) = \frac{Bl}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}} \sin \frac{2\pi}{l} x \sin \frac{2\pi}{l} t \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

a b) esetben.

15.29. a)

$$u(x, t) = \frac{lv_0}{n\pi c} \sin \left(n\pi \frac{x}{l} \right) \sin \left(n\pi \frac{ct}{l} \right).$$

b)

$$u(x, t) = \frac{A}{2} \left[\sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi ct}{l} + \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi ct}{l} \right]$$

Érdeemes felhasználni a

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

trigonometriai azonosságot.

15.30. A húr mozgásegyenletének D'Alembert-féle megoldása (ha a húr sebessége $t=0$ -ban nulla): $u(x, t) = \frac{1}{2} [F(x-ct) + F(x+ct)]$.

Itt $F(y)$ kifejezhető a húr $t=0$ -ban felvett alakjával, $f(y)$ -nal: $F(y) = f(y)$, ha $0 \leq y \leq l$; $F(2lm+y) = f(y)$ (a F függvény $2l$ szerint periodikus kiterjesztése $f(y)$ -nak) és $F(-y) = -F(y)$. Esetünkben

$$f(y) = \begin{cases} \frac{h}{a} y, & \text{ha } y \leq a, \\ \frac{h}{b} (l-y), & \text{ha } y \geq a. \end{cases}$$

15.31. A 15.27. feladatban láttuk, hogy 0 sebességgel történő induláskor a húr mozgása

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \omega_n t, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, 0) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Esetünkben

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{a}x, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{h}{b}(l-x), & \text{ha } x \geq a. \end{cases}$$

Így

$$a_n = \frac{2hl^2}{n^2\pi^2} \frac{\sin \frac{n\pi a}{l}}{ab}.$$

A k -adik felhang akkor nem szólal meg, ha $a_{k+1} = 0$, vagyis ha $a = \frac{l}{k+1}, \frac{2l}{k+1}, \dots$. A húrt tehát ott kell kihúzni, ahol a k -adik felharmonikusnak éppen csomópontja volna.

15.32. A 15.27. feladat szerint a húr mozgása abban az esetben, ha nincs kezdetben kitérése

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \omega_n t, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}.$$

A b_n együtthatókat a húr $\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = G(x)$ kezdeti sebesség-eloszlása határozza meg. Esetünkben

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < \frac{l}{2} - s \quad \text{vagy} \quad x > \frac{l}{2} + s, \\ v_0, & \text{ha } \frac{l}{2} - s \leq x \leq \frac{l}{2} + s, \end{cases}$$

így

$$b_n = \frac{2v_0}{l\omega_n} \int_{\frac{l}{2}-s}^{\frac{l}{2}+s} dx \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{2v_0}{l\omega_n} \frac{l}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin \frac{n\pi s}{l}.$$

Látjuk, hogy

$$b_{2k} = 0; \quad b_{2k+1} = \frac{4v_0}{l\omega_{2k+1}} \frac{l}{(2k+1)\pi} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{l},$$

azaz csak azok a felhangok gerjesztődnek, melyeknek $\frac{l}{2}$ -ben duzzadó helyük van. Az $s \rightarrow 0$, $v_0 s = p = \text{állandó}$ esetre

$$b_{2k} = 0; \quad b_{2k+1} = \frac{4p}{l\omega_{2k+1}} = \frac{4p}{\pi(2k+1)} \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}.$$

15.33. Legyen a húr $x \leq \frac{l}{2}$ felében a húr kitérése $u_1(x, t)$, az $x \geq \frac{l}{2}$ felében pedig $u_2(x, t)$. Mindkét függvény kielégíti a rezgő húr differenciálegyenletét a következő peremfeltételekkel: $u_1(0, t) = 0 = u_2(l, t)$ (a húr befogott volta); $u_1\left(\frac{l}{2}, t\right) = u_2\left(\frac{l}{2}, t\right)$ (a húr folytonos marad a felezőpontjában) és végül annak kifejezése, hogy a két húrfélben fellépő húzóerők függőleges komponensei gyorsítják az m tömeget: $x = \frac{l}{2}$ -ben

$$F \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (F = A\sigma, \text{ és a második peremfeltétel miatt a jobb oldalon akár } u_1\text{-et, akár } u_2\text{-t írhatjuk; a továbbiakban } u_1\text{-et fogunk ide helyettesíteni.)}$$

Az $u_1(x, t)$ és $u_2(x, t)$ függvényeket egyaránt szorzatalakban szeparáljuk, figyelembe véve, hogy mindkét húrfél azonos frekvenciával rezeg („a sajátfrekvencia”) és ezért u_1 -ben és u_2 -ben az időfüggvények azonosak: $u_1(x, t) = \varphi_1(x)\psi(t)$ és $u_2(x, t) = \varphi_2(x)\psi(t)$. A 15.27. feladathoz hasonlóan, a szétválasztás után kapott egyenletek megoldása:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= A \cos \lambda x + B \sin \lambda x; & \varphi_2(x) &= \\ &= C \sin \lambda(x + \alpha); & \lambda^2 &= \frac{\omega^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Az $u_1(0, t) = 0$ miatt $A=0$, az $u_2(l, t) = 0$ miatt $\alpha = -l$. A húr folytonosságát kifejező második peremfeltételből

$$B \sin \frac{\lambda l}{2} = -C \sin \frac{\lambda l}{2}. \quad (1)$$

A harmadik peremfeltételből pedig (felhasználva, hogy u_1 kielégíti a rezgő húr differenciálegyenletét):

$$F \left(B \lambda \cos \frac{\lambda l}{2} - C \lambda \cos \frac{\lambda l}{2} \right) = -ma^2 \lambda^2 B \sin \frac{\lambda l}{2}. \quad (2)$$

(1) és (2) a B, C állandókra homogén lineáris egyenletrendszer; ennek akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha a rendszer determinánsa 0, azaz ha

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda l}{2} \left(2F + ma^2 \lambda \operatorname{tg} \frac{\lambda l}{2} \right) = 0.$$

Ebből $\lambda_m = \frac{2m\pi}{l}$ (m egész), illetve a $\operatorname{tg} \frac{\lambda l}{2} = -\frac{2F}{ma^2} \frac{1}{\lambda}$ transzcendens egyenlet ugyancsak végtelen sok λ_n gyökét kapjuk. A sajátfrekvenciákat most is az $\omega = a\lambda$ összefüggésből kapjuk a fenti λ_m , ill. λ_n -ekre.

15.34. Legyen az $x \leq \frac{l}{2}$ húrfél kitérése $u_1(x, t)$, az $x \geq \frac{l}{2}$ húrfélé pedig $u_2(x, t)$. A különböző sűrűségek miatt ezek mozgásegyenlete különböző: $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$, illetve $\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$. E mozgásegyenletekhez a következő peremfeltételek tartoznak: a húr végeinek befogott voltát kifejező $u_1(0, t) = 0 = u_2(l, t)$; továbbá a húr folytonosságát kifejező $u_1\left(\frac{l}{2}, t\right) = u_2\left(\frac{l}{2}, t\right)$ és

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \left(\frac{l}{2}, t \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x} \left(\frac{l}{2}, t \right).$$

A megoldást szorzatalakban keressük: $u_1(x, t) = \varphi_1(x)\psi_1(t)$; $u_2(x, t) = \varphi_2(x)\psi_2(t)$. Mivel mindkét húrfél azonos frekven-

ciával rezeg, $\psi_1(t) = \psi_2(t) = D \cos \omega t + E \sin \omega t$. A mozgásegyenletekből a 15.33. feladat megfontolásaival ezért a

$$\varphi_1(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x; \quad \varphi_2(x) = C \sin \mu(x + \alpha)$$

kifejezéseket kapjuk (itt fennállnak az $\omega^2 = \lambda^2 \frac{\sigma}{\rho_1}$ és az

$\omega^2 = \mu^2 \frac{\sigma}{\rho_2}$ egyenletek). A végpontok befogása miatt $A=0$, $\alpha = -l$; a maradék két peremfeltétel pedig a B, C együtthatókra vonatkozó

$$B \sin \frac{\lambda l}{2} = -C \sin \frac{\mu l}{2},$$

$$B \lambda \cos \frac{\lambda l}{2} = C \mu \cos \frac{\mu l}{2}$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja. Ennek akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha a rendszer determinánsa eltűnik; ez a

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda l}{2} + \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \operatorname{tg} \frac{\lambda l}{2} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = 0$$

egyenlet alakjába írható. Ennek gyökei az $\eta_1 = \operatorname{tg} \xi$ és $\eta_2 = -\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \xi$ ($\xi = \lambda \frac{l}{2}$) görbék metszéspontjai adják.

Könnyen belátható, hogy végtelen sok λ_n megoldás van; ezek segítségével a kérdéses ω_n sajátfrekvenciák is meghatározhatók: $\omega_n = \lambda_n \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1}}$.

15.35. A rúd longitudinális rezgéseinek mozgásegyenlete $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Ehhez járulnak a különböző peremfeltételek: a befogott végen, $u(0, t) = 0$; a szabad végen $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} =$

$= E \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. A megoldást $u(x, t) = A \cos(\omega t + \alpha) \sin kx$ alak-

ban keressük, ahol $k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$. Az a) esetben az $x=l$ kirótt fel-
tételből $\cos kl = 0$, innen a sajátfrekvenciára kapjuk, hogy
 $\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\pi}{2l} (2n+1)$ (n természetes szám). A b és c esetben

hasonló módon kapjuk, hogy $\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{\pi n}{l}$.

15.36. A rúd longitudinális mozgásegyenletéhez a következő perem-
feltételek járulnak: $u(0, t) = 0$ (a rúd befogott volta), és
 $M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -AE \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}$. Ez utóbbi azt fejezi ki, hogy az
 M tömeg gyorsítását a húzott rúdban ébredő rugalmas erő
végzi. Figyelembe véve, hogy az $u(x, t)$ függvény kielégíti a
 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ egyenletet, a második peremfeltétel átírható
az $\frac{M}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = -A \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}$ alakba is. A megoldást az elő-
zőkhöz hasonlóan $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$ alakban keresve, $\varphi(x)$ -re a
 $\varphi(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$ kifejezést kapjuk. A rúd befogása
miatt $A=0$, a másik peremfeltételből pedig a $\operatorname{tg} \lambda l = \frac{A\rho}{M\lambda}$
transzcendens egyenletet kapjuk. Ennek végtelen sok λ_n gyöke
van; ezekből az $\omega_n = \lambda_n \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ összefüggéssel megkapjuk a kere-
sett sajátfrekvenciákat.

15.37. $\omega_n = \lambda_n \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, ahol λ_n az $y_1 = \operatorname{tg} \lambda l$ és $y_2 = \frac{A\rho(m+M)x}{Mmx^2 - A^2\rho^2}$ gör-
bék metszéspontjának abszcisszája (A a rúd keresztmetszete).

15.38. A membrán rezgéseit leíró egyenlet $\Delta u = \frac{\rho}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (p a membrán
feszültsége). A membrán szélei rögzítettek, itt $u=0$. Ezért a
téglalap alakú membránra vonatkozó megoldás

$$u(x, y, t) = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega t,$$

ahol a sajátfrekvenciák az $\omega^2 = \frac{p\pi^2}{\rho} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$ egyenlőségből
határozhatók meg (m és n egész számok).

15.39. A mozgásegyenlet $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \partial_i (\operatorname{div} \mathbf{u})$ ($i = 1, 2, 3$).

A peremfeltételek: az üregfal merevsége miatt

$$u_1(0, y, z) = u_1(a, y, z) = 0; \quad u_2(x, 0, z) = u_2(x, a, z) = 0;$$

$$u_3(x, y, 0) = u_3(x, y, a);$$

illetve a szabad tangenciális elmozdulás miatt

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(0, y, z) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(a, y, z) = \frac{\partial u_3}{\partial x}(0, y, z) = \frac{\partial u_3}{\partial x}(a, y, z) = 0;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 0, z) = \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, a, z) = \frac{\partial u_3}{\partial y}(x, 0, z) = \frac{\partial u_3}{\partial y}(x, a, z) = 0;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(x, y, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial z}(x, y, a) = \frac{\partial u_2}{\partial z}(x, y, 0) = \frac{\partial u_2}{\partial z}(x, y, a) = 0.$$

A peremfeltételeket a következő függvényekkel kielégíthetjük:

$$u_1 = \sum_n q_{n_1}(t) \sin \frac{n_1 \pi x}{a} \cos \frac{n_2 \pi y}{a} \cos \frac{n_3 \pi z}{a},$$

$$u_2 = \sum_n q_{n_2}(t) \cos \frac{n_1 \pi x}{a} \sin \frac{n_2 \pi y}{a} \cos \frac{n_3 \pi z}{a},$$

$$u_3 = \sum_n q_{n_3}(t) \cos \frac{n_1 \pi x}{a} \cos \frac{n_2 \pi y}{a} \sin \frac{n_3 \pi z}{a}.$$

Ezeket a függvényeket a mozgásegyenletbe helyettesítve, a
 $q_{n_i}(t)$ függvényekre kapjuk, hogy

$$\rho \ddot{q}_{n_i} + \mu \frac{\pi^2}{a^2} \left(\sum_{j=1}^3 n_j^2 \right) q_{n_i} + (\lambda + \mu) \frac{\pi^2}{a^2} n_i \left(\sum_{j=1}^3 q_{n_j} n_j \right) = 0$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Az ω_n sajátfrekvenciák q_n időfüggését határozzák meg: $\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0$. A \ddot{q}_n mennyiséget innen az előző egyenletrendszerbe helyettesítve, homogén lineáris egyenletrendszert kapunk; ennek akkor van nemnulla megoldása, ha a determináns eltűnik. Ez ω_n^2 -re harmadfokú egyenletet ad, ennek megoldása

$$\omega_n^{(1)} = \omega_n^{(2)} = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}};$$

$$\omega_n^{(3)} = \frac{\pi}{a} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

- 15.40. A radiális rezgések rotációmentesek: $\text{rot } \mathbf{u} = 0$. Ezért $\mathbf{u} = \text{grad } \Phi$ és Φ kielégíti a $\Delta \Phi = c_1^2 \rho \Phi$ egyenletet. Monokromatikus radiális hullámra ez az

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\frac{\omega^2}{c_1^2} \Phi$$

alakot ölti. Az origóban véges megoldás: $\Phi = A \frac{\sin kr}{r} e^{i\omega t}$, a

$\sigma_{rr}(R) = 0$ határfeltétel pedig kirója, hogy $\text{tg} \frac{\omega R}{c_1} = \frac{\omega R}{c_1} \left(1 - \frac{\omega R}{2c_1} \right)^{-2}$. A sajátfrekvenciák ezen egyenlet megoldásai.

- 15.41. A hullám $u(x, t) = u_0 \sin(kx - \omega t)$, ahol $\omega = ck$ és c a hullám

terjedési sebessége. A kinetikus energiasűrűség: $\frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 = \frac{1}{2} \rho u_0^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t)$. A rugalmas energiasűrűség:

$$\frac{1}{2} K \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} K u_0^2 k^2 \cos^2(kx - \omega t).$$

Mint hogy $Kk^2 = K \frac{\omega^2}{c^2} = \rho \omega^2$, ezért a teljes energiasűrűség:

$$W = W_{\text{kin}} + W_{\text{rug}} = 2W_{\text{kin}} = \rho \omega^2 u_0^2 \cos^2(kx - \omega t).$$

Az átlagos energiasűrűség: $\bar{W} = \frac{1}{T} \int_0^T W dt = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2$, az átlagos energiaáram pedig $\bar{W}c$.

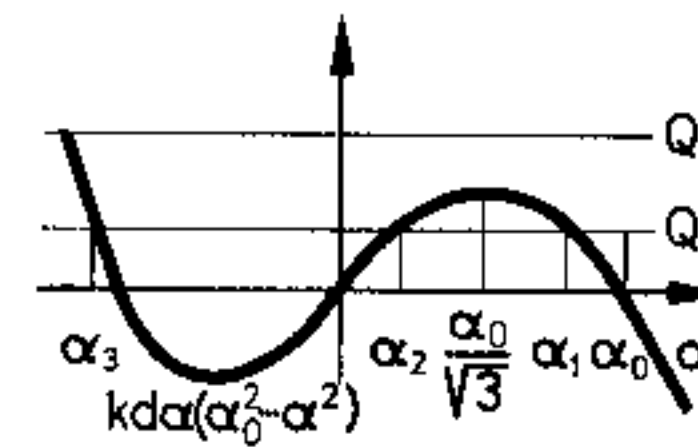
- 15.42. A rudakban $\frac{Q}{2 \sin \alpha}$ erő hat. A Hooke-törvény szerint

$$\delta l = \frac{d}{\cos \alpha_0} - \frac{d}{\cos \alpha} = \frac{Q}{2k \sin \alpha},$$

ahol $k = AE \cos \alpha_0 / d$. Mivel α_0 és α kicsi, a fenti egyenletet sorba fejtjük. Vezető rendben azt kapjuk, hogy

$$kd\alpha(\alpha_0^2 - \alpha^2) = Q.$$

Az egyenlet grafikus megoldását az *a* ábra mutatja:



A jobb oldali lokális maximum az $\alpha_0/\sqrt{3}$ szöghöz tartozik; a függvény maximális értéke itt

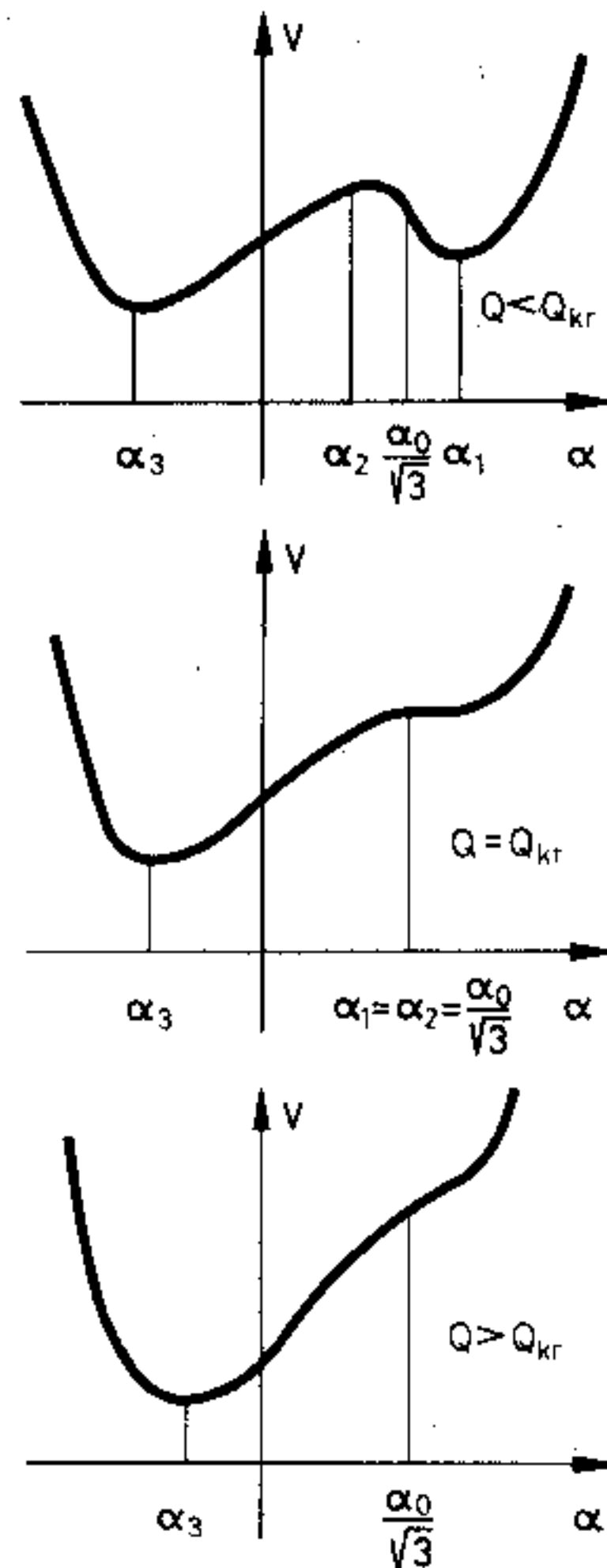
$$Q_k = kd\alpha_0^3 \frac{2}{3^{3/2}}.$$

Amíg $Q < Q_k$, a vizsgált egyenletnek három gyöke van. Fizikailag értelmes megoldásnak $Q \rightarrow 0$ esetén α_0 -hoz kell tartania (ha a rúd még nem billent át), ezért α_1 a keresett megoldás. $Q > Q_k$ esetén viszont csak egyetlen megoldás létezik, ami mindig negatív szöghöz (α_3) tartozik. Az átbillenés tehát a $Q = Q_k$ terhelésnél következik be, amikor is az $\alpha_1 = \alpha_0/\sqrt{3}$ szöghöz tartozó állapot instabillá válik és a rendszer átvált az α_3 -hoz tartozó állapotába.

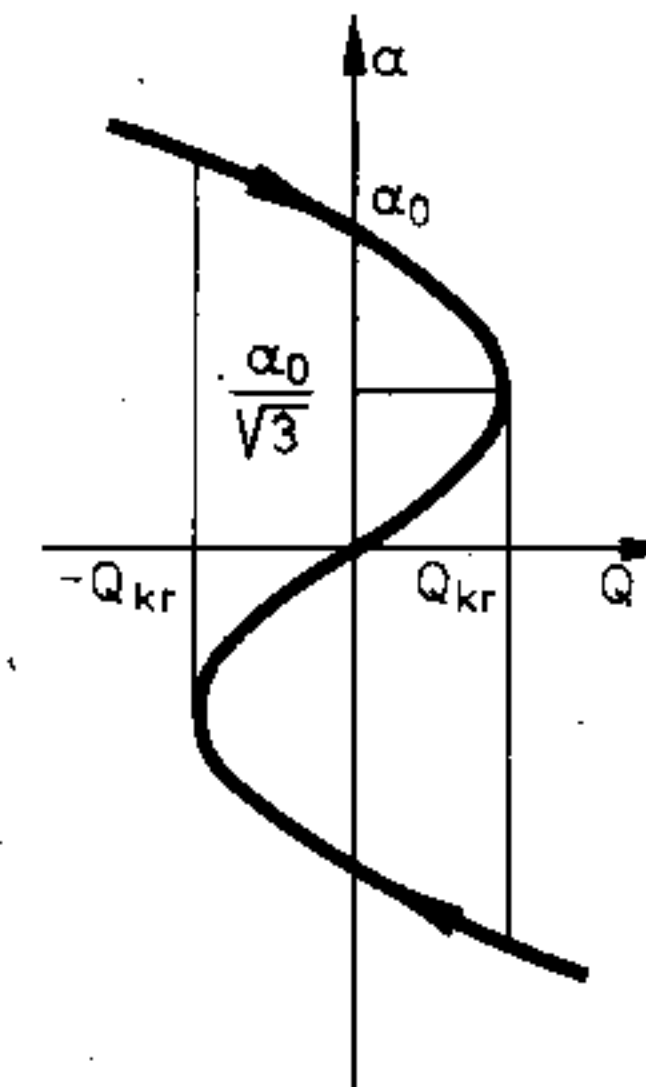
A stabilitási viszonyokat jól szemlélteti az energiafüggvény.
A rendszer teljes energiája a szög függvényében

$$V(\alpha) = k \left(\frac{d}{\cos \alpha_0} - \frac{d}{\cos \alpha} \right)^2 - Qd(\operatorname{tg} \alpha_0 - \operatorname{tg} \alpha) \approx \\ \approx \frac{kd^4}{4} (\alpha_0^4 - 2\alpha_0^2 \alpha^2 + \alpha^4) - Qd(\alpha_0 - \alpha).$$

A fentiek alapján a $V(\alpha)$ függvény típusa különböző Q teher esetén felrajzolható:



A $Q < Q_k$ esetben tehát α_2 mindig instabil egyensúlyi helyzet ($Q=0$ -ra ez felel meg a két rúd vízszintes állapotának), α_1 és α_3 stabil. Az átbillenés akkor történik meg, amikor a jobb oldali lokális minimum eltűnik a potenciálfüggvényben. Végül érdemes megemlíteni, hogy amennyiben negatív Q értéket is megengedünk (Q erővel húzzuk fölfelé a középső csuklót), hisztérezisszerű jelenséget tapasztalunk: Ha ugyanis, miután a rendszer negatív α szöghöz tartozó állapotba billent át, felfelé kezdjük húzni a csuklót, ismét instabil állapothoz jutunk, de most $Q = -Q_{kr}$ a kritikus érték. A kitérés-terhelés függvény tehát a következő:



15.43. A mozgásegyenlet az X transzverzális kitérésére:

$$\theta E \frac{\partial^4 X}{\partial z^4} + Q \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \rho S \ddot{X} = 0,$$

ahol θ a rúd keresztmetszetének tömegközéppontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka; E , ρ és S rendre a rúd

Young-modulusa, sűrűsége és keresztmetszete. A peremfeltételnek is eleget tevő megoldást az

$$X = X_0 \sin \frac{n\pi z}{l} e^{i\omega t}$$

alakban keresve, a sajátfrekvenciára

$$\omega_n^2 = \frac{1}{\rho S} \left(\theta E \frac{n^2 \pi^2}{l^2} - Q \right) \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

adódik. A rendszer akkor válik instabillá, ha valamelyik normál modusának frekvenciája képzetessé válik.

A jelen esetben ez először $n=1$ -re következik be. A kritikus terhelés

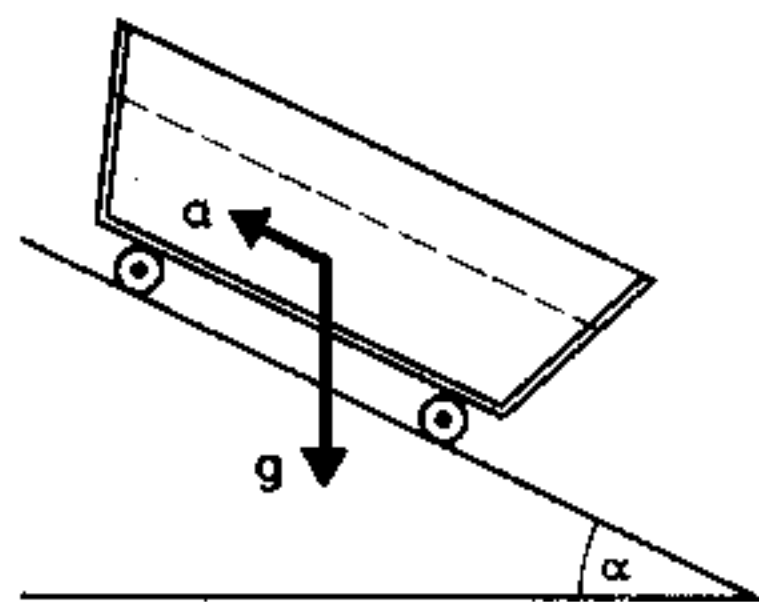
$$Q_{kr} = \frac{\pi^2 \theta E}{l^2}$$

$Q > Q_{kr}$ esetén valamelyik irányban kihajlik a rúd.

16. Hidrodinamika

16.1. A labda az edény alján marad.

16.2. A csillével együtt gyorsuló koordináta-rendszerből nézve, a folyadékra ható tömegközéppont-sűrűség az ábrán látható g és a vektori eredője. Amennyiben a súrlódás és a kerekek tehetetlenségi



nyomatéka kicsi, úgy a csille gyorsulása $a = g \sin \alpha$. Ilyenkor a folyadék felszíne párhuzamos a lejtővel, a nyomás pedig h mélységben $p = \rho \cdot g \cdot h \cdot \cos \alpha$.

16.3. A hidrosztatikai nyomás a felszíntől x mélységben

$$p = \rho_1 \cdot g \cdot x, \quad \text{ha } 0 < x < h_1,$$

$$\rho_2 \cdot g(x - h_1) + \rho_1 g h_1, \quad \text{ha } h_1 < x < h_2 + h_1$$

(ρ_1 az olaj, ρ_2 pedig a víz sűrűsége, h_1 és h_2 a megfelelő folyadékvastagságok).

Az oldalfal d szélességű darabjára

$$F = d \int_0^{h_1+h_2} p(x) dx = d \cdot g \cdot (\rho_1 h_1^2 / 2 + \rho_2 h_2^2 / 2 + \rho_1 h_1 h_2)$$

nagyságú erő hat.

16.4. A gravitációból eredő tömegközéppont-sűrűség a Föld belsejében $f = -g \cdot r/R$, ahol R a Föld sugara, g pedig a felszínen mért nehézségi gyorsulás. Integráljuk az $f = -1/\rho \cdot \text{grad } p$ egyenletet egy sugár mentén a Föld középpontjától a felszínig:

$$\frac{1}{\rho} \int_{p_0}^0 \text{grad } p dr = -g \int_0^R \frac{1}{R} r dr,$$

ahonnan

$$p_0 = \frac{1}{2} \rho g R.$$

16.5. $p(z) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0}{\rho_0} g \cdot z \right)^{\frac{n}{n-1}};$

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0}{\rho_0} g z \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

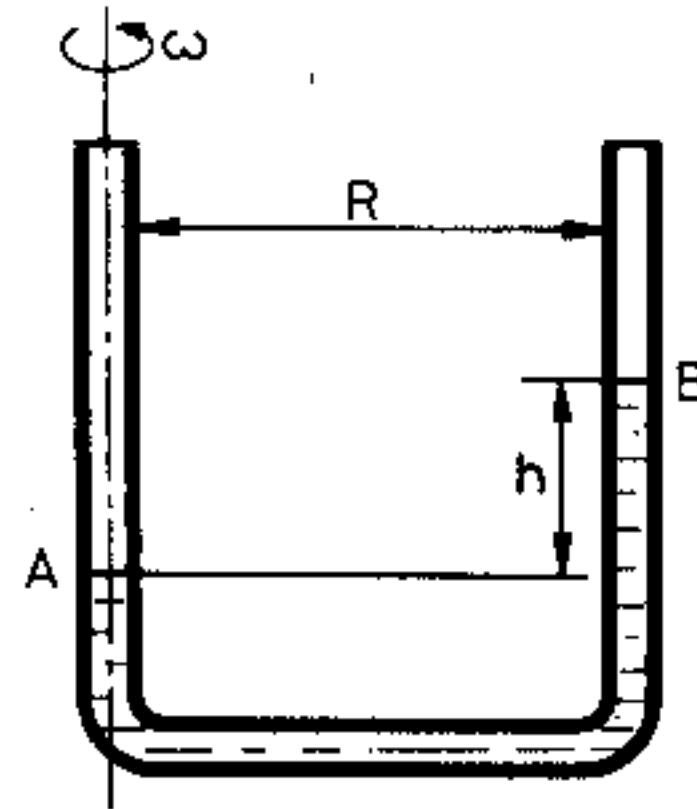
16.6. Írjuk fel a forgó koordináta-rendszerben érvényes Bernoulli-egyenletet az A és a B pontokra:

$$\frac{1}{2} v^2 + g \cdot z - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{p}{\rho} = \text{állandó}.$$

- a) Ha a forgás elég lassú, akkor az A pont a függőleges forgástengelyen marad:

$$\frac{p_0}{\rho} = gh + \frac{1}{2} \omega^2 R^2 + \frac{p_0}{\rho},$$

ahonnan
$$h^{(a)} = \frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$



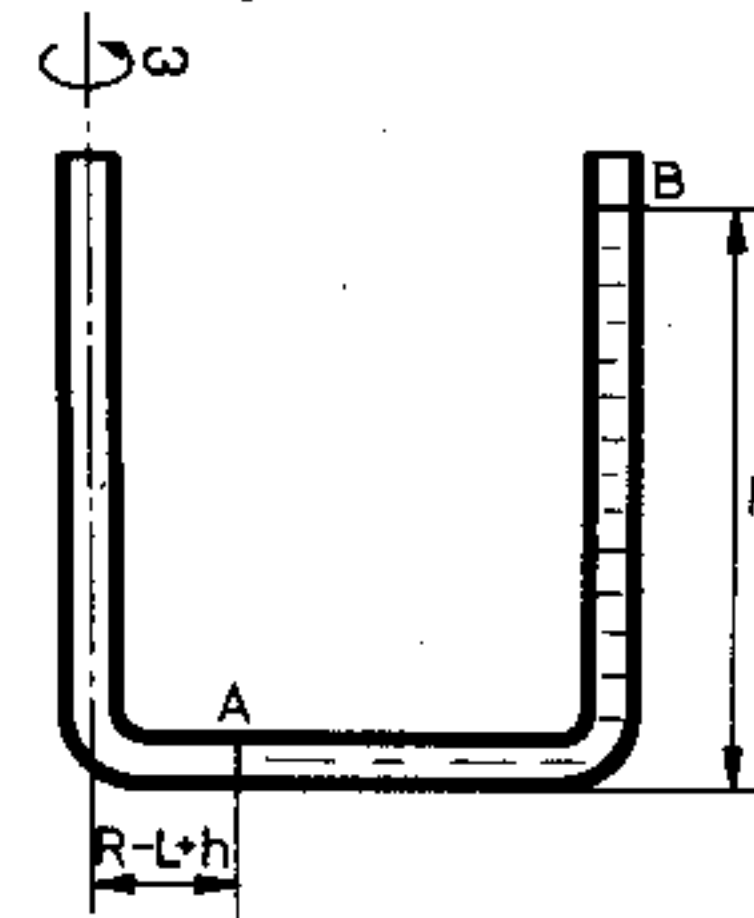
- b) Amennyiben a forgás olyan gyors, hogy a belső csőben már nem marad folyadék, úgy

$$-\frac{1}{2} \omega^2 (R-L+h)^2 = gh - \frac{1}{2} \omega^2 R^2$$

(L a folyadékszál teljes hossza). Ezt az egyenletet megoldva

$$h^{(b)} = L - R - \frac{g}{\omega^2} + \sqrt{R^2 - 2 \frac{g}{\omega^2} (L-R) + \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2}.$$

Az a) eset akkor áll fenn, ha $h^{(a)} < L - R$, vagyis $\omega^2 < \frac{2g}{R^2} (L-R) = \omega_{kr}^2$, a b) eset pedig akkor, ha $\omega > \omega_{kr}$.



- 16.7. Felírhatjuk a kontinuitási egyenletet:

$$\rho(x) \cdot v(x) \cdot f(x) = \rho(0) \cdot v(0) \cdot f(0);$$

a Bernoulli-egyenletet: $\frac{1}{2} v^2(x) + \int \frac{dp}{\rho(p)} \Big|_x = \text{állandó}$; továbbá a gáz állapotegyenletét: $p = \text{állandó} \cdot \rho^\kappa$. Az utóbbi két egyenletből

$$v^2(x) = v^2(0) + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p(0)}{\rho(0)} \left[1 - \frac{p(x)}{p(0)} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}},$$

amely a

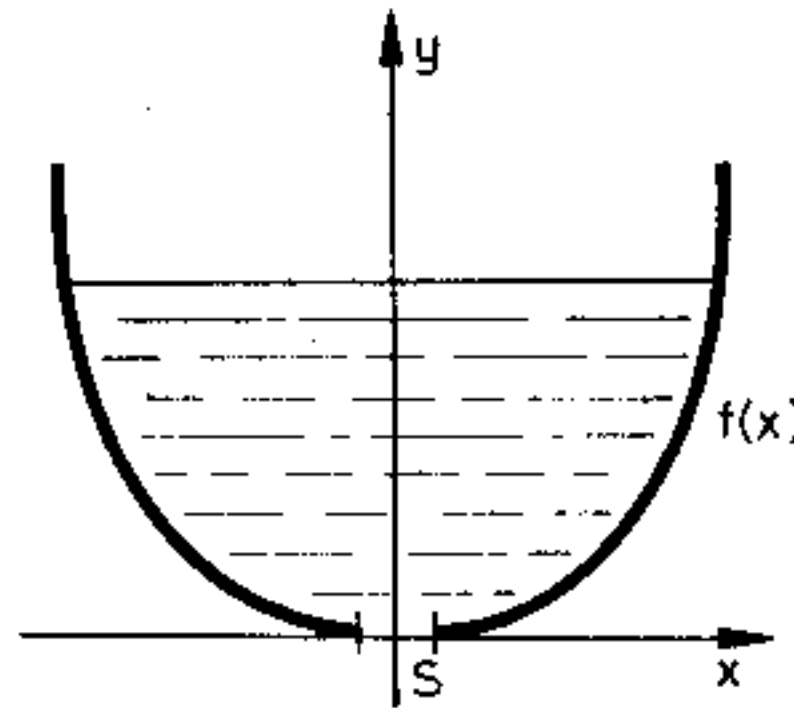
$$v(x) = v(0) \cdot \frac{f(0)}{f(x)} \cdot \left(\frac{p(0)}{p(x)} \right)^{1/\kappa}$$

összefüggéssel együtt zárt rendszert alkot $v(x)$ -re és $p(x)$ -re.

- 16.8. Legyen a „folyadékóra” szimmetriatengelye az y-tengely, az alakját leíró függvény pedig $y = f(x)$! Jelöljük a kifolyónyílás keresztmetszetét S-sel, a kívánt állandó vízszintsüllyedési sebességet pedig v_0 -lal! A kontinuitási egyenlet szerint $S \cdot v =$

$= x^2 \cdot \pi \cdot v_0$, ahol v a kiömlés pillanatnyi sebessége. Mivel $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot y} = \sqrt{2 \cdot g \cdot f(x)}$, a felület egyenlete:

$$f(x) = \frac{\pi^2 v_0^2}{2gS^2} \cdot x^4.$$



16.9. A kontinuitási egyenletből

$$f(x) \cdot v(x) = \text{állandó} = f(0)v_0.$$

A Bernoulli-egyenlet szerint

$$\frac{1}{2}v^2(x) + \frac{1}{\rho}p(x) = \frac{1}{2}v_0^2 + p_0/\rho,$$

tehát

$$v(x) = \frac{f(0) \cdot v_0}{f(x)} \quad \text{és} \quad p(x) = p_0 + \frac{1}{2}\rho[v_0^2 - v^2(x)].$$

(A fenti képletek csak ott érvényesek, ahol a folyadék teljesen kitölti a cső keresztmetszetét.)

16.10. $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ periódusidejű harmonikus rezgőmozgást. (L a folyadékkal töltött rész teljes hossza.)

16.11. $|\mathbf{F}| = \sqrt{2} \cdot A \cdot \rho \cdot v^2 = 8,8 \text{ N}$.

16.12. A csőbe belépő folyadék elszakad a cső falától és egy szűkülő keresztmetszetű nyálábot alkot. Ha az edény keresztmetszete S_0 -hoz képest elég nagy, akkor az áramlás stacionáriusnak te-

kinthető. Az edényben levő folyadék impulzusváltozása egy kicsiny Δt idő alatt:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \cdot \Delta t + \Delta \mathbf{p}',$$

ahol \mathbf{F} a külső erők eredője, \mathbf{p}' pedig a kiáramló folyadék által elvitt impulzus. Stacionárius áramlás esetén $\Delta \mathbf{p} = 0$. A folyadékra ható vízszintes erőhöz csak az oldalfalak függőleges felülete ad járulékot. Itt a folyadék nem áramlik (!), tehát csak a $p = \rho \cdot g \cdot h$ hidrosztatikai nyomás lép fel. A szemközti oldalfalak járulékai majdnem kiegyenlítik egymást, csak a nyílással szemben levő S_0 felületen ható $S_0 \cdot \rho \cdot g \cdot h$ erő marad meg. Az impulzusmérleg tehát:

$$S_0 \cdot \rho \cdot g \cdot h = S_1 \cdot \rho \cdot v^2,$$

ahol v a kiáramló víz sebessége az edényen kívül. Az energiamegmaradás tételéből $\rho g h = \rho v^2/2$, tehát $S_1 = S_0/2$.

16.13. A tartályból Δt idő alatt $v \cdot S \cdot \Delta t$ térfogatú víz távozik; ez függőleges irányban $\Delta p = \rho S \cdot v^2 \cdot \Delta t$ impulzust visz el. A vízre ható erő eszerint $F = \Delta p / \Delta t = \rho \cdot S \cdot v^2$. Ez az erő a G súlyerő és a tartály aljának N nyomóerejéből származik: $F = G - N$. A tartályra ható erő tehát $N = G - \rho \cdot S \cdot v^2$. Mivel a kifolyónyílás közelében a víznek vízszintes irányú sebessége is van, a Bernoulli-egyenlet szerint

$$\frac{1}{2}\rho(v^2 + v_{\text{vízszintes}}^2) = \rho g h,$$

ahonnan $v^2 < 2gh$.

Másrészt a tartály aljára ható N erőt úgy is kiszámíthatjuk, hogy a fenéklap $A - S$ keresztmetszetét (A a teljes tartálykeresztmetszet) megszorozzuk a tartály alján levő átlagos nyomással: $N = (A - S)p$. Mivel az edény alján a folyadék áramlik, a Bernoulli-egyenlet szerint

$$p = \rho g h - \rho v^2/2 < \rho g h,$$

tehát $N < (A - S) \cdot \rho g \cdot h$. N korábban felírt alakjának és a $G = A \cdot \rho \cdot g \cdot h$ összefüggésnek a felhasználásával:

$$2gh > v^2 > gh.$$

(A sebesség pontos értékének kiszámításához az áramlás részletesebb leírására lenne szükség.)

16.14. Egy adott pillanatban a felső edényben levő víz súlya legyen G_1 , az edény alján levő S_1 keresztmetszetű nyíláson kiáramló víz átlagos függőleges sebessége pedig v_1 . Az alsó edényben legyen ugyanakkor G_2 súlyú víz és a beleömlő S_2 keresztmetszetű vízszögletes függőleges sebességét jelölje v_2 . A kontinuitási egyenlet szerint: $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

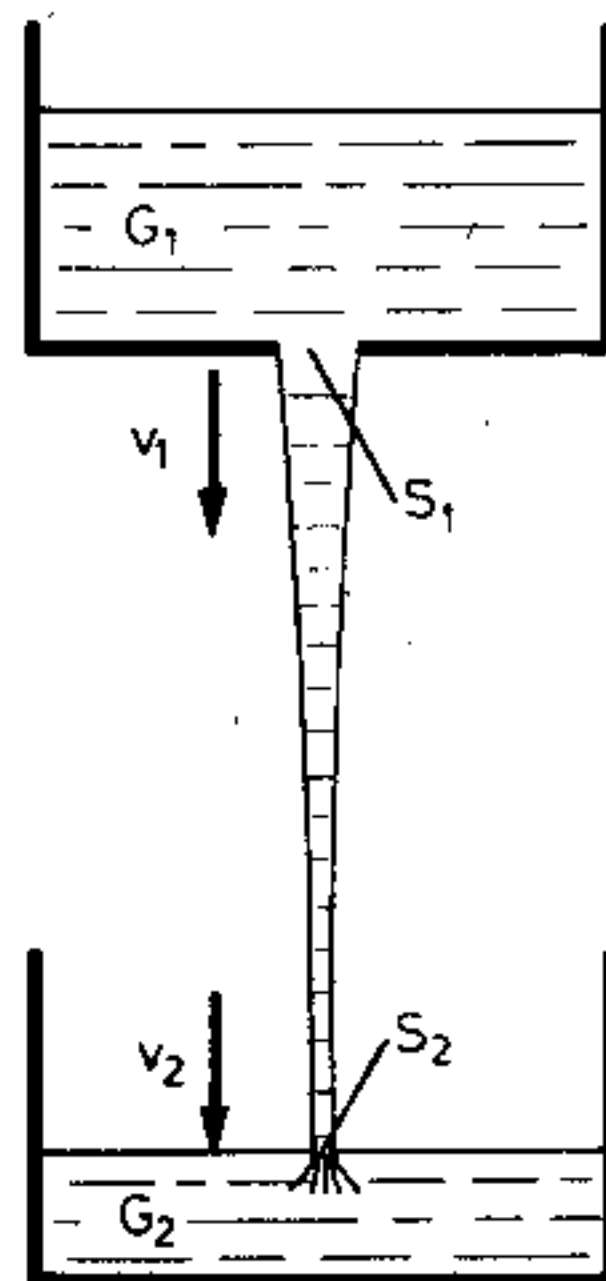
Az előző feladat megoldását felhasználva az egyes edényekre ható erők:

$$N_1 = G_1 - \rho S_1 v_1^2,$$

$$N_2 = G_2 + \rho S_2 v_2^2,$$

a teljes erő pedig

$$F = N_1 + N_2 = G_1 + G_2 + \rho S_1 v_1 (v_2 - v_1).$$



Ha a felső nyílásból a vízcseppenként t idő alatt esnek az alsó edénybe, akkor $v_2 - v_1 = gt$. Mivel t idő alatt $S_1 v_1 t$ térfogatú víz áramlik ki a felső tartályból, a két edény között éppen a levegőben levő folyadék súlya: $G_3 = \rho S_1 v_1 (v_2 - v_1)$. A mérleg tehát továbbra is egyensúlyban marad.

Ezt az eredményt sokkal egyszerűbben is megkaphattuk volna, hiszen csak azt kell megfontolnunk, hogy az áramlás stationárius, tehát a tömegközéppont nem gyorsul, s így a rendszerre ható erők eredője nulla. A rendszert lefelé a súlyerő húzza, fölfelé a mérleg karja nyomja, s a fentiek szerint ezek az erők egyenlőek.

16.15. Az origó egy kis környezetét kivéve lehet. Mivel $\text{div } \mathbf{v} = 0$, a kontinuitási egyenlet teljesül; $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ miatt az áramlás örvénymentes és a $\Phi = -A/r$ potenciál gradienseként származtatható.

16.16. A kontinuitási egyenlet szerint $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$, a határfeltétel pedig $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ (\mathbf{n} a felület normálvektora). Be szeretnénk látni, hogy

$$\mathbf{P} = \iiint_{(V)} \rho \mathbf{v} d^3 r = 0.$$

Szorozzuk meg \mathbf{P} -t egy tetszőleges szerinti állandó \mathbf{e} vektorral és használjuk ki az

$$\mathbf{e}(\rho \mathbf{v}) = \text{div } \rho \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})$$

azonosságot! A Gauss–Ostrogradszkij-tétel felhasználásával

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{P} = \iiint_{(V)} \text{div} [\rho \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})] d^3 r = \iint \rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) dF.$$

A felületi integrál a határfeltételek miatt eltűnik, s mivel \mathbf{e} tetszőleges vektor, \mathbf{P} valóban nulla kell legyen.

16.17. Az áramlás nyilván gömbszimmetrikus, tehát csak $v_r(r, t)$ különbözik nullától. A kontinuitási egyenlet szerint $r^2 v_r = R^2 v_r[r=R(t)]$, ahonnan

$$v_r(r, t) = \frac{1}{r^2} \dot{R} R^2 \quad \left[\dot{R} \equiv \frac{dR(t)}{dt} \right].$$

Az Euler-egyenlet radiális komponense

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

ahonnan

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(r, t)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} (2\dot{R}^2 R + R^2 \ddot{R}) - \frac{2}{r^3} R^4 \dot{R}^2.$$

Mivel $\partial p/\partial r$ -nek explicite ismerjük az r -függését, integrálhatunk R -től végtelenig:

$$p[r=R(t)] = p_\infty + \rho \left(\frac{3}{2} \dot{R}^2 + R\ddot{R} \right).$$

Ezt az eredményt a

$$\frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{állandó}$$

Bernoulli-egyenletből közvetlenül is megkaphatjuk ($\Phi \equiv -\frac{R^2 \dot{R}}{r}$ a sebességpotenciál).

16.18. Az előző feladat megoldásába a $p[R(t)] \equiv 0$ függvényt helyettesítve, $R(t)$ -re egy differenciálegyenletet kapunk. Ennek $R(t=0) = R_0$ és $\dot{R}(t=0) = 0$ kezdeti feltételekhez tartozó megoldását keressük, pontosabban azt a T időt, melyre $R(T) = 0$.

A $V(t) \equiv \dot{R}$ helyettesítéssel és az $\ddot{R} = \frac{1}{2} \frac{d}{dR} V^2$ azonosság felhasználásával a

$$-\frac{3}{2} \dot{R}^2 - R\ddot{R} = \frac{p_\infty}{\rho}$$

egyenlet

$$-\frac{3}{2} V^2 - \frac{R}{2} \frac{d}{dR} V^2 = \frac{p_\infty}{\rho}$$

alakra hozható, amely R szerint közvetlenül integrálható:

$$\int_0^V \frac{d(V^2)}{3V^2 + \frac{2p_\infty}{\rho}} = \int_{R_0}^R -\frac{dR}{R},$$

$$V(R) = -\sqrt{\frac{2p_\infty}{3\rho} \left(\frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right)} \equiv \frac{dR(t)}{dt}.$$

Ez ismét egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amelyet az $R(t=T) = 0$ és $\dot{R}(t=0) = R_0$ értékek között integrálva

$$T = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_\infty}} \int_0^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{(R_0/R)^3 - 1}} = \sqrt{\frac{3R_0^2 \rho \pi}{2p_\infty}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} = 0,915 R_0 \sqrt{\frac{\rho}{p_\infty}}$$

adódik.

16.19. A gömbbel együtt mozgó koordináta-rendszerben

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}') = -\mathbf{v}_0 + \frac{R^3}{2r'^5} [3(\mathbf{v}_0 \mathbf{r}') \mathbf{r}' - v_0 r'^2]$$

Az eredeti rendszerbe a

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0,$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 t$$

Galilei-transzformációval térhetünk vissza.

16.20. Az előző feladat eredményének felhasználásával a \mathbf{v}_0 sebességgel mozgó, éppen az origóban levő R sugarú gömb körüli víz sebességeloszlása:

$$\mathbf{v} = \frac{R^3}{2r^3} [3(\mathbf{v}_0 \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{v}_0] \quad \left(\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r} \right),$$

mozgási energiája pedig

$$E = \frac{\rho}{2} \int d^3 r v^2 =$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_R^\infty r^2 dr \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^6}{4r^6} (3v_0^2 \cos^2 \vartheta + v_0^2) =$$

$$= \frac{R^3 \pi}{3} \rho v_0^2.$$

Ez az eredmény úgy interpretálható, mintha a vasgolyó m tömege $m^* = \frac{2R^3 \pi}{3} \rho$ értékkel megnőtt volna (ρ a víz sűrűsége).

A rezgés frekvenciája eszerint

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m+m^*}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{1 + \rho_{\text{víz}}/2\rho_{\text{vas}}}} \approx 0,97v_0,$$

ahol v_0 a levegőben mért frekvencia.

(Megjegyezzük, hogy ugyanezt az eredményt az áramló víz impulzusából közvetlenül nem kaphattuk volna meg, mert a radiális integrál logaritmikusan divergens, a ϑ szög szerinti pedig nulla, így a szorzatuk határozatlan.)

16.21. Bontsuk fel $f(z)$ -t valós és képzetes részre:

$$\operatorname{Re} f = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad r \equiv \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{Im} f = \frac{Q}{2\pi} \varphi \quad \operatorname{tg} \varphi = y/x.$$

Az áramvonalak egyenlete: $\operatorname{Im} f = \text{állandó}$, vagyis $\varphi = \text{állandó}$; az ekvipotenciális görbéké pedig $\operatorname{Re} f = \text{állandó}$, azaz $r = \text{állandó}$.

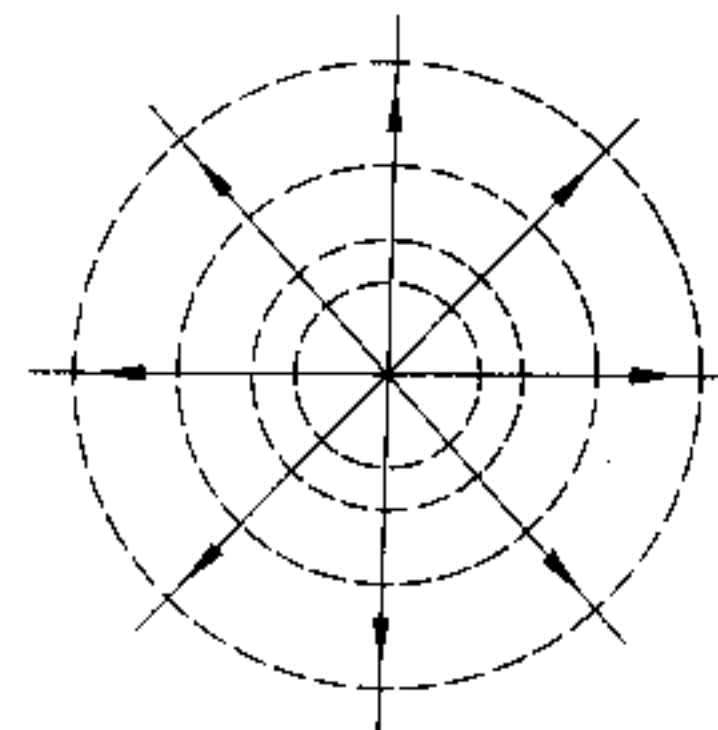
A kétdimenziós sebességvektor mint komplex szám:

$$v = v_x + iv_y = \frac{df}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z} = \frac{Q}{2\pi} \frac{x+iy}{x^2+y^2}.$$

Síkbeli polárkoordinátákban: $v_\varphi = 0$; $v_r = \frac{Q}{2\pi r}$.

Az áramlás egy forrást ír le, melynek fluxuserőssége:

$$\oint v_r ds = \int_0^{2\pi} v_r r d\varphi = Q.$$



16.22. a) A z_0 pontban elhelyezkedő, Γ cirkulációjú örvény.

b) v_0 sebességű homogén áramlás.

16.23. Az ε helyen levő Q erősségű forrás potenciálfüggvénye:

$$f_1 = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - \varepsilon),$$

az origóbeli Q erősségű nyelőé pedig

$$f_2 = -\frac{Q}{2\pi} \ln z.$$

A két áramlás szuperpozíciója:

$$f_1 + f_2 = \frac{Q}{2\pi} [\ln(z - \varepsilon) - \ln z].$$

Ha $Q \cdot \varepsilon = d = \text{állandó}$ és $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor

$$(f_1 + f_2) \rightarrow -\frac{d}{2\pi} \frac{1}{z}.$$

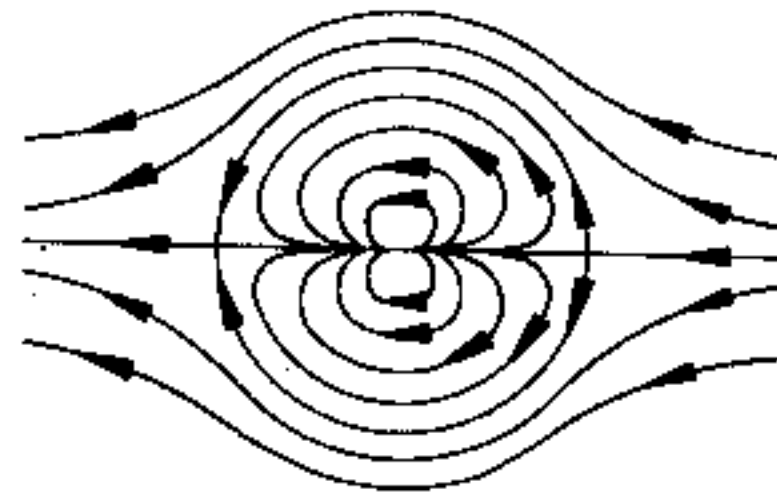
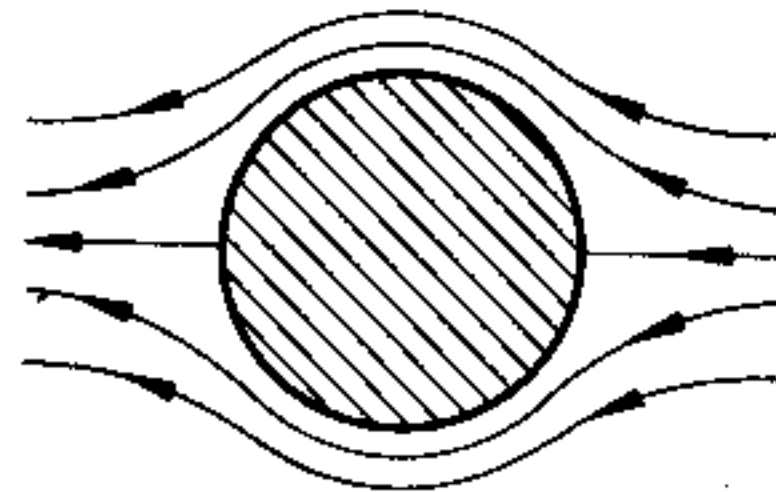
Az áramvonalak egyenlete (ha d valós): $\text{Im} \frac{-1}{z} = \frac{y}{x^2+y^2} =$
 $=$ állandó; ezek az origón átmenő, az x -tengelyt érintő körök.

16.24. A homogén áramlás és a dipól sebességpotenciáljainak összege (lásd az előző két feladatot)

$$f(z) = a \cdot z + b/z.$$

Az áramvonalak egyenlete valós a és b esetén

$$\text{Im} f(z) = a \cdot y - \frac{b \cdot y}{x^2+y^2} = C.$$



A $C=0$ -nak megfelelő áramvonal az $y=0$ egyenes, illetve egy $\sqrt{b/a}$ sugarú kör, melynek középpontja az origóban van. Legyen $a=v_0$ és $b=v_0 R^2$; ekkor az áramlás sebessége nagy távolságban v_0 és a kör alakú áramvonal sugara R . Ebben az esetben az áramlás az $r > R$ tartományban megegyezik egy henger körüli áramlással. A sebességvektor komponensei:

$$v_x = \text{Re} \frac{d}{dz} \left(v_0 z - v_0 \frac{R^2}{z} \right) = v_0 \left[1 - R^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right],$$

$$v_y = -\text{Im} \frac{d}{dz} \left(v_0 z - v_0 \frac{R^2}{z} \right) = -v_0 R^2 \cdot \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

16.25. Φ kielégíti a síkbeli Laplace-egyenletet, tehát a belőle származtatott $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$ sebességeloszlás divergenciamentes, másrészt $v_r \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \vartheta$ eltűnik a határfelületen.

16.26. A szél sebessége a hangárnál

$$v_\vartheta(r = R, \vartheta) = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi(R, \vartheta)}{\partial \vartheta} = -2v_0 \sin \vartheta.$$

A Bernoulli-egyenlet alapján a nyomás

$$p(\vartheta) = p_0 - \rho v^2 / 2 = p_0 - 2\rho v_0^2 \sin^2 \vartheta.$$

A hangár belsejében a nyomás $p(\vartheta = \pi) = p_0 =$ állandó. A felületre ható erő a nyomáseloszlás szimmetriája miatt függőleges irányú, nagysága pedig

$$F = L \int_0^\pi [p_0 - p(\vartheta)] \sin \vartheta \cdot R \cdot d\vartheta = \frac{8}{3} L \cdot R \cdot \rho v_0^2 = 9 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

16.27. A sebességpotenciál:

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \{ \ln [z - (a + ib)] + \ln [z - (a - ib)] + \ln [z - (-a - ib)] + \ln [z - (-a + ib)] \}.$$

A sebesség a $v_x - iv_y = f'(z)$ összefüggésből számolható; az x -tengely mentén pl. $v_y = 0$ és

$$v_x(x, y = 0) = \frac{Q}{\pi} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{x+a}{(x+a)^2 + b^2} \right].$$

A nyomás a B fal mentén a Bernoulli-egyenlet szerint

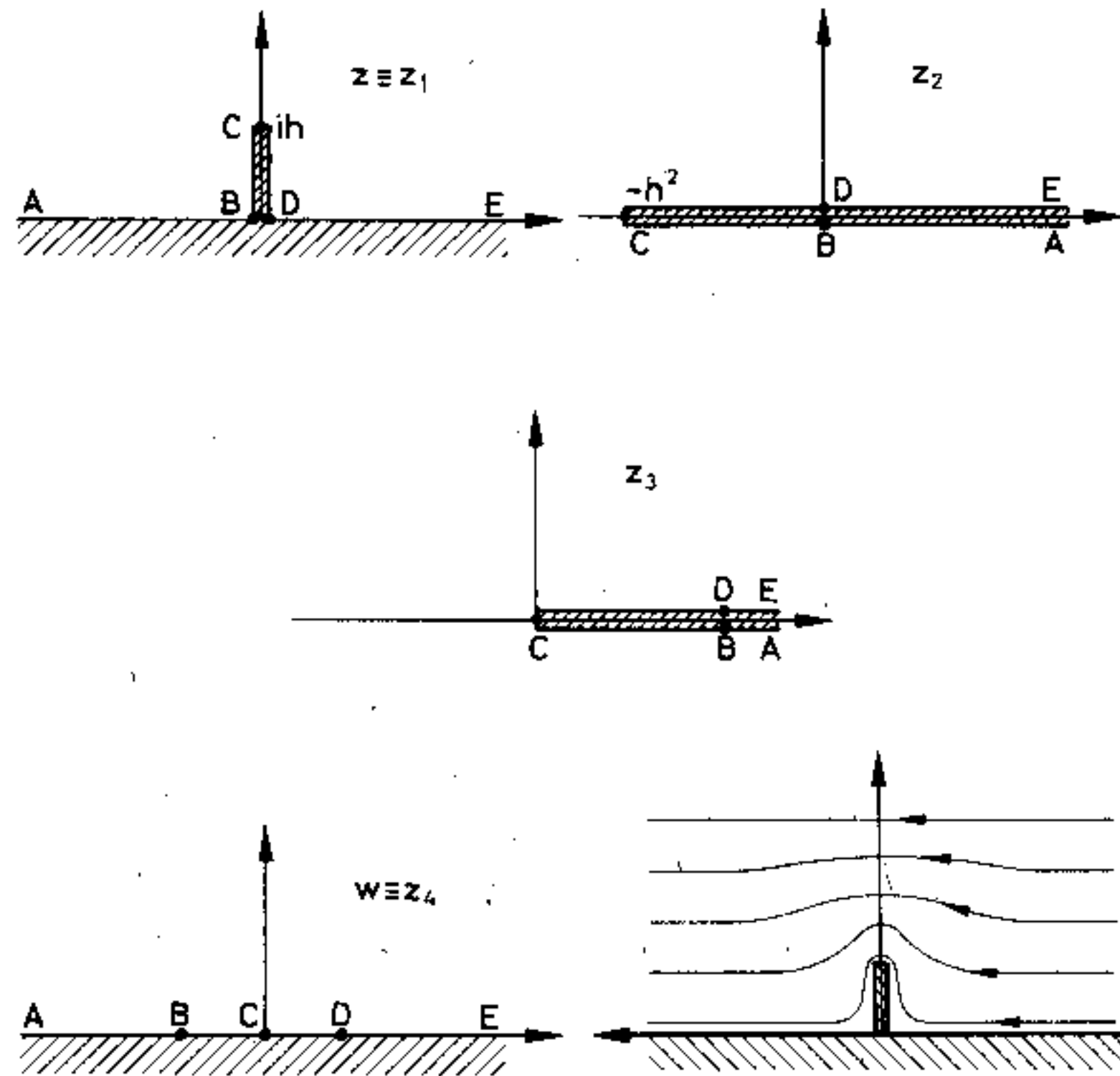
$$p = p_0 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_x^2.$$

16.28. A keresett leképezés három lépésben hajtható végre. A $z_2 = z_1^2$ függvény a vizsgált tartományt a valós tengely mentén a $(-h^2, \infty)$ intervallumon bevágott síkba viszi át. A vágás bal szélét az origóba tolhatjuk

$$z_3 = z_2 + h^2,$$

majd gyökvonással ismét egy félsíkot kapunk, immár bemetszés nélkül:

$$z_4 = \sqrt{z_3}.$$



A teljes transzformáció: $w(z) = \sqrt{z^2 + h^2}$.

A z_4 sík felső felén egy lehetséges áramlás – amely a végtelenben v_0 sebességű – az $f(w) = v_0 \cdot w$ potenciálfüggvénnyel írható le. Ugyanez a függvény a z síkon is egy lehetséges áramlást ad meg: $f(z) \equiv f[w(z)] = v_0 \cdot \sqrt{z^2 + h^2}$. A sebességeloszlás:

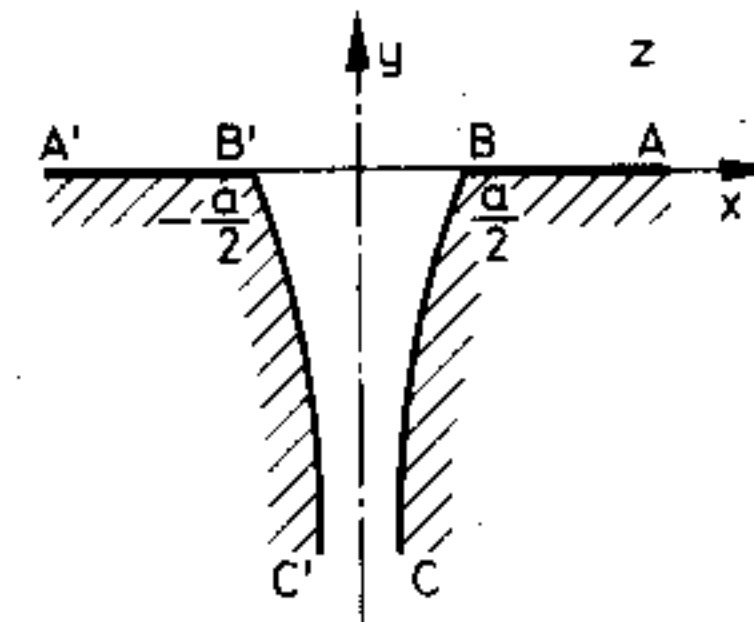
$$v_x - iv_y = \frac{df}{dz} = v_0 \frac{z}{\sqrt{z^2 + h^2}}.$$

Az áramvonalak egyenlete:

$$(x^2 - C^2)(y^2 + C^2) = h^2 C^2,$$

ahol $C = \frac{1}{v_0} \operatorname{Im} f(z) = \text{állandó}$. Az áramlási képet az x -tengelyre tükrözve, éppen a keresett megoldást kapjuk.

16.29. A BC és $B'C'$ görbék mentén (lásd ábrát) a sebesség nagysága



$v_1 = \sqrt{2p_0/\rho}$. Jelöljük az áramlás komplex sebességét

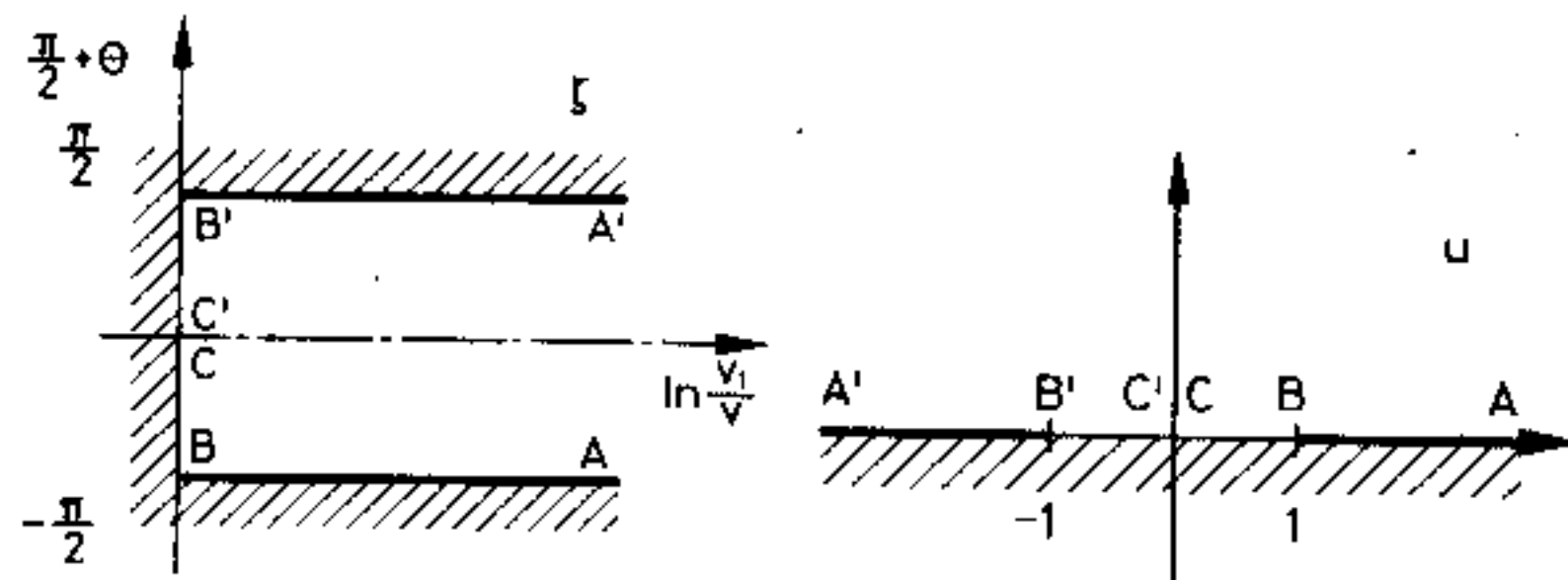
$$v_x + iv_y = v \cdot e^{i\theta} \equiv \frac{dw}{dz}$$

módon és képezzük a javasolt

$$\zeta = -\ln \left[\frac{dw}{dz} \cdot \frac{1}{v_1 \cdot e^{i\pi/2}} \right] \equiv \ln \frac{v_1}{v} + i \left(\frac{\pi}{2} + \Theta \right)$$

transzformációt $\left(v_1 e^{i\pi/2} = \frac{dw}{dz} \Big|_c \right)$. Bár ez tartalmazza az is-

meretlen dw/dz sebességeloszlást, annyit mindenesetre tudunk róla, hogy az áramlási teret az ábrán látható végtelen felsávba képezi le. Ezt a tartományt már könnyen átvihetjük egy végtelen felsíkba: $u = \sin(i\zeta)$.



Ha a_1 -gyel jelöljük a folyadéksugár szélességét a nyílástól nagyon messze, akkor az időegységenként kiáramló folyadék mennyisége $a_1 v_1$. A komplex u síkon az origóba helyezett $2a_1 v_1$ erősségű pontszerű nyelő valósítja meg a keresett áramlást, tehát $w = -\frac{a_1 v_1}{\pi} \ln u$. A korábbi összefüggésekkel

együtt ez a függvény összekapcsolja $w(z)$ -t $\frac{dw}{dz}$ -vel, vagyis egy differenciálegyenletet ad a sebességpotenciálra.

A BC áramvonal mentén $w = \varphi$ ($\text{Im } w = 0$), továbbá

$$\zeta = i\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right),$$

tehát

$$\varphi = \frac{a_1 v_1}{\pi} \ln(-\cos \Theta).$$

Másrészt

$$\frac{d\varphi}{dz} = v_1 \cdot e^{-i\Theta}, \text{ így}$$

$$dz \equiv dx + i dy = \frac{1}{v_1} e^{i\Theta} d\varphi = \frac{a_1}{\pi} e^{i\Theta} \text{tg } \Theta d\Theta.$$

Ezt az $x = a/2, y = 0, \Theta = -\pi$ kezdeti feltételekkel integrálva a határgörbe paraméteres előállítását kapjuk. Speciálisan B és C között integrálva

$$\int_{a/2}^{a/2} dx = \frac{a_1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sin \Theta d\Theta,$$

ahonnan a sugár „összeszűkülési tényezője”:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{\pi}{2 + \pi} = 0,61.$$

16.30. A nyomás egyenletesen csökken az áramlás irányában:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\Delta p}{l} = \text{állandó},$$

a sebességeloszlás pedig: $v_y = -\frac{\Delta p}{\rho \eta l} \left(z^2 - \frac{d^2}{4} \right)$.

16.31. $\frac{dp}{dy} = -\frac{\Delta p}{l} = \text{állandó}$. Keressük a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_y(x, z) = -\frac{\Delta p}{2\rho \eta} = \text{állandó},$$

$$v_y|_{\text{határon}} = 0$$

egyenlet megoldását a határfelületen eltűnő lineáris függvények szorzatának alakjában:

$$v_y = A \cdot z \cdot \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} a - \sqrt{3} x \right) \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} a + \sqrt{3} x \right).$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_y = -2 \cdot \sqrt{3} A a \text{ valóban állandó, } A = \frac{\Delta p}{2\sqrt{3} a \rho \eta}.$$

Az időegységenként átáramló folyadék tömege:

$$\int_A \int dz dx \rho v_y(x, z) = 0,005 \cdot \frac{\Delta p a^4}{\eta}.$$

$$16.32. v_z = \frac{\Delta p}{4\eta l} \left[r_2^2 - r^2 + \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_2} \right].$$

$$16.33. a) \frac{dp}{dr} = \rho \frac{v_\varphi^2}{r}, \quad v_\varphi = \frac{\omega_1 r_1^2}{r_1^2 - r_2^2} \left(r - \frac{r_2^2}{r} \right);$$

$$b) v_\varphi = -\frac{\omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right);$$

$$c) v_\varphi = \frac{\omega_1 r_1^2 - \omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} r + \frac{(\omega_2 - \omega_1) r_1^2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \frac{1}{r}.$$

Mindhárom esetben $v_z = v_r = 0$.

16.34. A gömbbel együtt mozgó koordináta-rendszerben az áramlás stacionárius, továbbá $\text{div } \mathbf{v} = 0$ miatt \mathbf{v} valóban felírható rot \mathbf{A} alakban. \mathbf{A} egy axiálvektor, amely csak \mathbf{u} és \mathbf{r} függvénye, és mivel \mathbf{u} -ban lineáris, $\mathbf{A} = (\mathbf{u} \times \mathbf{r})f(r)$ alakú kell legyen. A mozgásegyenlet rotációját képezve a nyomást tartalmazó tag kiküszöbölhető:

$$\text{rot } \Delta \mathbf{v} = 0,$$

$$\Delta \text{rot rot } [(\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \cdot f(r)] = 0.$$

Ez $f(r)$ -re egy negyedrendű differenciálegyenlet, melynek megoldásából

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b \cdot \frac{r^2 \mathbf{u} + (\mathbf{ru})\mathbf{r}}{r^3} + c \frac{3(\mathbf{ru})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{u}}{r^5}.$$

A végtelenbeli határfeltételből $a = -1$, a gömb felületén eltűnő sebességből pedig

$$b = \frac{3R}{4}, \quad c = -\frac{R^3}{4}.$$

A megoldás tehát

$$\mathbf{v} = -\mathbf{u} + \frac{3R}{4} \frac{\mathbf{u} + (\mathbf{un})\mathbf{n}}{r} - \frac{R^3}{4} \frac{3(\mathbf{un})\mathbf{n} - \mathbf{u}}{r^3},$$

ahol $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Közvetlen behelyettesítéssel igazolható, hogy

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{3R}{2} \frac{\mathbf{u}r^2 - 3(\mathbf{ur})\mathbf{r}}{r^5} \equiv \frac{3R}{2} \text{grad } \frac{\mathbf{ur}}{r^3},$$

így a $\text{grad } p = \eta \Delta \mathbf{v}$ egyenlet integrálásából a nyomás:

$$p = p_0 + \frac{3\eta R}{2} \frac{\mathbf{ur}}{r^3}.$$

A gömbre ható erőnek a nyomófeszültségekből adódó része:

$$\mathbf{F}_1 = \oint \oint p d\mathbf{F} = p_0 \oint \oint d\mathbf{F} + \frac{3\eta R}{2} \oint \oint \frac{\mathbf{ur}}{r^3} d\mathbf{F}.$$

Az első integrál nulla, a második pedig a Gauss-Osztrog-radszkij-tétel felhasználásával (vigyázat: $d\mathbf{F}$ a gömb közepe felé mutató vektor!):

$$\mathbf{F}_1 = \frac{3\eta}{2R^2} \oint \oint (\mathbf{ur}) d\mathbf{F} = -\frac{3\eta}{2R^2} \iiint \text{grad } (\mathbf{ur}) dV = -2\pi R \eta \mathbf{u}.$$

A nyirófeszültségekből származó erőt is hasonlóan – konkrét koordináta-rendszerre való hivatkozás nélkül – számíthatjuk:

$$\mathbf{F}_2 = \eta \oint \oint (\mathbf{D} + \tilde{\mathbf{D}}) d\mathbf{F} = -4\pi R \eta \mathbf{u},$$

ahol $\mathbf{D} \equiv \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}}$ a derivált tenzort jelöli.

A teljes fékezőerő: $\mathbf{F} = -6 \cdot \pi \cdot R \cdot \eta \cdot \mathbf{u}$ (Stokes-formula).

16.35. Az előző feladat mintájára ismét a

$$\Delta \text{rot rot } [(\mathbf{u} \times \mathbf{r})f(r)] = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, de most kétdimenzióban, tehát $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Az eredmény:

$$f(r) = ar^3 + br \ln r + cr + d/r.$$

A $\mathbf{v} = \text{rot } [(\mathbf{u} \times \mathbf{r})f(r)]$ sebességnek a végtelenben ($-\mathbf{u}$)-hoz kell tartania, a henger felületénél pedig el kell tűnnie; ez viszont semmilyen a, b, c és d választással nem érhető el.

A még mindig lineáris, de a $(v \text{ grad})v$ tagot részben figyelembe vevő

$$\rho(u \text{ grad})v = -\text{grad } p + \eta \Delta v$$

(úgynevezett Oseen-) egyenlet már nem ellentmondásos, s belőle a fékezőerőre az

$$F = -\frac{4\pi\eta u}{\frac{1}{2} - C - \ln \frac{uR\rho}{4\eta}}$$

képletet kapjuk.

FÜGGELÉK

Néhány gyakran használt matematikai összefüggés

Taylor-sorok

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots, m > 0,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

$$\text{tg } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots,$$

$$\text{sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$$

$$\text{th } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots,$$

$$(1+x)^{-m} = 1 - mx + \frac{m(m+1)}{2} x^2 - \dots, m > 0,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

$$\text{ctg } x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} - \dots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots,$$

Néhány elemi integrál

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|, |x| < a,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|, |x| > a,$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{a^2+x^2})^3} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a}, |x| < a,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} = \ln |x + \sqrt{x^2+a^2}|,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{Arch} \frac{x}{a} = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}|, |x| > a,$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcsin} \frac{a}{x}, |x| > a,$$

$$\int \operatorname{tg} ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax|,$$

$$\int \operatorname{ctg} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax|,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 ax} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax,$$

$$\int \operatorname{th} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{ch} ax|,$$

$$\int \operatorname{cth} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\operatorname{sh} ax|,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{th} ax,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{cth} ax,$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin 2ax,$$

$$\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)},$$

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}, \quad a \neq b,$$

$$\int x \sin ax \, dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a},$$

$$\int x^2 \sin ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cos ax,$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin 2ax$$

$$\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin 2ax,$$

$$\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)},$$

$$\int \sin ax \cos ax \, dx = -\frac{\cos 2ax}{4a},$$

$$\int x \cos ax \, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a},$$

$$\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax.$$

Differenciálegyenletek

$$y'(x) = -ay(x),$$

$$y(x) = C_1 e^{-ax},$$

$$y'(x) + ay(x) = f(x),$$

$$y_{\text{part}}(x) = \int_c^x f(z) e^{a(z-x)} \, dz,$$

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0,$$

$$y(x) = e^{-\int_c^x a(z) \, dz}$$

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x),$$

$$y_{\text{part}}(x) = \int_c^x f(z) e^{\int_c^z a(z) \, dz} \, dz,$$

$$y'(x) = \frac{a(x)}{b(y)}$$

$$\int b(y) \, dy = \int a(x) \, dx + C_1,$$

$$y''(x) = -b^2 y(x)$$

$$y(x) = C_1 \sin bx + C_2 \cos bx = \\ = C \sin(bx + \varphi),$$

$$y''(x) = b^2 y(x),$$

$$y(x) = C_1 \operatorname{sh} bx + C_2 \operatorname{ch} bx = \\ = C_3 e^{bx} + C_4 e^{-bx},$$

$$y''(x) + 2ay'(x) + b^2 y(x) = 0,$$

$$y(x) = C_1 e^{-a+\sqrt{a^2-b^2}x} + \\ + C_2 e^{-a-\sqrt{a^2-b^2}x}, \quad a^2 > b^2,$$

$$y(x) = e^{-ax} (C_1 \sin(\sqrt{b^2-a^2}x) + \\ + C_2 \cos(\sqrt{b^2-a^2}x)), \quad a^2 < b^2,$$

$$y(x) = e^{-ax} (C_1 x + C_2), \quad a^2 = b^2,$$

$$y''(x) + 2ay'(x) + b^2 y(x) = f(x)$$

$$y_{\text{part}}(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \int_c^x f(z) e^{a(z-x)} \operatorname{sh}(\sqrt{a^2-b^2}(x-z)) \, dz, \quad a^2 > b^2,$$

$$y_{\text{part}}(x) = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \int_c^x f(z) e^{a(z-x)} \sin(\sqrt{b^2-a^2}(x-z)) \, dz, \quad a^2 < b^2,$$

$$y_{\text{part}}(x) = \int_c^x f(z) (x-z) e^{a(z-x)}, \quad a^2 = b^2.$$

Fourier - sorfejtés

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l,$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx.$$

Euler-féle összefüggés

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Derékszögű koordináta-rendszerben:

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z,$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

Hengerkoordináta-rendszerben:

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z,$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

Gömbi koordináta-rendszerben:

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi,$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta v_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial(\sin \vartheta v_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r +$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rv_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\varphi,$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}.$$



1 B2/40 00001653

Fiz. Kvt.

Térfogatelem:

Derékszögű koordináta-rendszerben: $dV = dx dy dz,$

Hengerkoordináta-rendszerben $dV = r dr d\varphi dz,$

Gömbi koordináta-rendszerben $dV = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$

Vektoroperátorokra vonatkozó azonosságok:

$$\text{rot grad } \Phi = 0,$$

$$\text{div rot } \mathbf{v} = 0,$$

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v},$$

$$\text{div}(\Phi \mathbf{v}) = \Phi \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{grad } \Phi,$$

$$\text{rot}(\Phi \mathbf{v}) = \Phi \text{rot } \mathbf{v} + \text{grad } \Phi \times \mathbf{v},$$

$$\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u} \text{rot } \mathbf{v},$$

$$\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \text{grad})\mathbf{u} - (\mathbf{u} \text{grad})\mathbf{v} +$$

$$+ \mathbf{u} \text{div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{div } \mathbf{u},$$

$$\text{grad}(\mathbf{u}\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \text{grad})\mathbf{u} + (\mathbf{u} \text{grad})\mathbf{v} +$$

$$+ \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

Integráltételek

$$\int_1^2 \text{grad } \Phi \, dl = \Phi_2 - \Phi_1,$$

$$\int \text{rot } \mathbf{v} \, d\mathbf{F} = \oint \mathbf{v} \, ds \quad (\text{Stokes-tétel})$$

$$\int \text{div } \mathbf{v} \, dV = \oint \mathbf{v} \, d\mathbf{F} \quad (\text{Gauss-tétel})$$

Tankönyvkiadó Vállalat

A kiadásért felelős: Petró András igazgató

Szedte a Nyomdaipari Fényszedő Üzem (809088/80)

Dabasi Nyomda, 80-1919 Budapest-Dabas, 1980

Felelős vezető: Bálint Csaba igazgató

Raktári szám: 42260/1

Felelős szerkesztő: Oláh Gyuláné

Műszaki vezető: Lójd Lajos

Grafikai szerkesztő: Nagyistók Mária

Műszaki szerkesztő: Szilágyi Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1980. szeptember

Megjelent: 1981. augusztus

Példányszám: 3000

Terjedelem: 27,5 (A/5) ív

Készült: fényszedéssel, íves ofszetnyomással, az MSZ 5601-59 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint