**Mérési jegyzőkönyv**

**02. Rugalmas állandók mérése**

A mérést végezte és a jegyzőkönyvet készítette:

Radics Máté (RAMRAAT.ELTE), Fizika BSc II. évfolyam

A leadás ideje: 2010. december 7. (kedd)

**1. A mérés célja**

A mérés célja két rugalmas test (egy téglalap keresztmetszetű, valamint egy hengeres rúd) Young-moduluszának, valamint egy torziós szál torziómoduluszának meghatározása volt.

Mérési feladatok:

1. A kapott minták felhajlásának mérése a terhelő erő függvényében (téglalap keresztmetszetű minta esetében mindkét élen), ábrázolás, egyenesillesztés, ezekből a Young-modulusz meghatározása
2. A felhajlás $l^{3}$ függésének igazolása kísérletileg a feltámasztási pontok $l$ távolságának változtatásával
3. A kiadott huzal torziómoduluszának meghatározása
4. Az üres torziós inga tehetetlenségi nyomatékának meghatározása
5. Az $a^{2}- T^{2}$ egyenes korrelációs együtthatójának megadásával a Steiner-tétel igazolása

+hibaszámítás

**2. Mérőeszközök**

* Egy téglalap keresztmetszetű (vörösréz) és egy hengeres (sárgaréz) rúd
* „Hajlítógép” felhajlásmérővel
* Torziós inga a hozzá tartozó torziós szállal és próbatestekkel

**3. A mért adatok**

**3.1.A felhajlás vizsgálata a terhelés függvényében (téglalap keresztmetszetű rúd)**

A használt jelölések:



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | $$a\_{i}(mm)$$ | $$b\_{i}(mm)$$ |
| Mérésszáma | 1. | 11,95 | 7,25 |
| 2. | 12,00 | 7,20 |
| 3. | 12,05 | 7,15 |
| Átlag | 12,00 | 7,20 |
| Szórás | 0,05 | 0,05 |

Ezzel a rúd végleges adatai: $a=12,00\pm 0,05 mm; b=7,20\pm 0,05 mm$.

**3.1.1. A szélesebb élén nyugvó rúd felhajlása**

A keresztmetszet másodrendű nyomatéka: $I=\frac{a∙b^{3}}{12}=3,7325$. Hibája: $\frac{ΔI}{I}=\frac{Δa}{a}+3\frac{Δb}{b}=0,1⋅10^{-10}m^{4}$, azaz

$$I=(3,7\pm 0,1)∙10^{-10} m^{4}.$$

A nullhelyzeti felhajlás $s\_{0}=0,62 mm$ volt.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tömeg (kg) | Erő (N) | Mértfelhajlás (m) | Relatívfelhajlás (m) |
| 1,25 | 12,26 | 0,00062 | 0,00000 |
| 2,25 | 22,07 | 0,00092 | 0,00030 |
| 2,75 | 26,98 | 0,00107 | 0,00045 |
| 3,25 | 31,88 | 0,00121 | 0,00059 |
| 4,25 | 41,69 | 0,00153 | 0,00091 |
| 5,25 | 51,50 | 0,00187 | 0,00125 |
| 7,25 | 71,12 | 0,00249 | 0,00187 |

A kapott adatokra GNUplot segítségével egyenest illesztettem.



Az illesztett görbe meredeksége: $m=(3,195\pm 0,031)∙10^{-5};$ $\left[m\right]=m/N.$

A rúd hossza: $l=40\pm 0,05 cm$ (a feltámasztási pontok távolsága).

Ezek alapján a rúd Young-modulusa:
$$E=\frac{1}{48}\frac{l^{3}}{mI}=1,11791∙10^{11}Pa=111,791 GPa.$$

Hibája: $\frac{ΔE}{E}=3\frac{Δl}{l}+\frac{Δm}{m}+\frac{ΔI}{I}=5 GPa$, tehát

$$E\_{Cu}=111\pm 5 GPa$$

**3.1.2. A keskenyebb élén nyugvó rúd felhajlása**

Másodrendű nyomaték: $I'=\frac{b∙a^{3}}{12}=1,0368∙10^{-9} m^{4}$, hibája: $ΔI'=0,02⋅10^{-9}m^{4}$.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tömeg (kg) | Erő (N) | Mért felhajlás (m) | Relatívfelhajlás (m) |
| 1,25 | 12,26 | 0,0004 | 0 |
| 2,25 | 22,07 | 0,0005 | 0,0001 |
| 2,75 | 26,98 | 0,0055 | 0,00015 |
| 3,25 | 31,88 | 0,0006 | 0,0002 |
| 5,25 | 51,50 | 0,0078 | 0,00038 |
| 7,25 | 71,12 | 0,0098 | 0,00058 |

Ezekre az adatokra is egyenest illesztettem.



Az illesztett görbe meredeksége: $m=(9,8\pm 0,1)∙10^{-6};$ $\left[m\right]=m/N.$

$E=\frac{1}{48}\frac{l^{3}}{mI}=1,31779∙10^{11}Pa=131,779 GPa$, hibája: $\frac{ΔE}{E}=3\frac{Δl}{l}+\frac{Δm}{m}+\frac{ΔI}{I}=5 GPa$, azaz

$$E\_{Cu}^{'}=132\pm 5 GPa$$

A két eredmény eltérésének sajnos nem tudom az okát…

**3.2. A felhajlás** $l^{3}$ **függésének vizsgálata (hengeres rúd)**

Az állandó terhelő erő $103\pm 1 N$ volt; ez a minta ránézésre sárgarézből készült.

|  |  |
| --- | --- |
|  | $$d\_{i}(mm)$$ |
| Mérésszáma | 1. | 11,93 |
| 2. | 11,92 |
| 3. | 11,91 |
| Átlag | 11,92 |
| Szórás | 0,01 |

A rúd végleges adatai: $d=11,92\pm 0,01 mm \rightarrow R=5,960\pm 0,005 mm.$

Ebből a másodrendű nyomaték: $I=\frac{π}{4}∙R^{4}=9,91003∙10^{-10} m^{4}$, hibája: $\frac{ΔI}{I}=4\frac{ΔR}{R}=0,003⋅10^{-10} m^{4}$

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A rúdhossza (m) | Nullhelyzet(m) | Mért felhajlás (m) | Relatívfelhajlás (m) | $$l^{3} (m^{3})$$ |
| 0,1 | 0,00043 | 0,00045 | 0,00002 | 0,001000 |
| 0,15 | 0,00042 | 0,00048 | 0,00006 | 0,003375 |
| 0,2 | 0,00043 | 0,00056 | 0,00013 | 0,008000 |
| 0,25 | 0,00045 | 0,00070 | 0,00025 | 0,015625 |
| 0,3 | 0,00057 | 0,00102 | 0,00045 | 0,027000 |
| 0,35 | 0,00051 | 0,00120 | 0,00069 | 0,042875 |

Az illesztett egyenes:



Az illesztett egyenes meredeksége: $m=0,0169\pm 0,0003;\left[m\right]=m/N.$

A Young-modulus: $E=\frac{1}{48}\frac{F}{mI}=1,28125∙10^{11}Pa=128,125 GPa$, hibája: $\frac{ΔE}{E}=\frac{ΔF}{F}+\frac{Δm}{m}+\frac{ΔI}{I}=4 GPa$. Ebből

$$E\_{sárgaréz}=128\pm 4 GPa$$

**3.3. A torziómodulusz mérése:**

A középponttól való távolságok és a hozzájuk tartozó periódusidők:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$a (cm)$$ | $$a^{2}(cm^{2})$$ | $$10 T (s)$$ | $$T^{2} (s^{2})$$ |
| 0 | 0 | 53,789 | 28,933 |
| 3 | 9 | 66,650 | 44,422 |
| 4 | 16 | 75,147 | 56,471 |
| 5 | 25 | 84,792 | 71,897 |
| 6 | 36 | 95,110 | 90,459 |
| 7 | 49 | 106,257 | 112,906 |
| 8 | 64 | 118,405 | 140,197 |
| 9 | 81 | 129,519 | 167,752 |
| 10 | 100 | 140,526 | 197,476 |

A periódusidő négyzete a két test tengelytől való távolságnégyzetének függvényében:



Az illesztett egyenes adatai: $T^{2}\left(a^{2}\right)=(16992\pm 114)⋅a^{2}+29,4\pm 0,6$. A korrelációs együttható: $r=0,9998$, í**gy az** $a^{2}$ **és a** $T^{2}$ **közti lineáris kapcsolatot** (azaz a Steiner-tételt) **is beláttuk.**

Az egyik henger adatai:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| hd |  | $$m\_{1} (g)$$ | $$h\_{1} (mm)$$ | $$d\_{1} (cm)$$ |
| 1 | 196,7076 | 13,91 | 4,505 |
| 2 | 196,7075 | 13,90 | 4,510 |
| 3 | 196,7077 | 13,89 | 4,510 |
| Átlag | 196,7076 | 13,90 | 4,508 |
| Szórás | 0,0001 | 0,01 | 0,003 |

A másik henger adatai:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| hd |  | $$m\_{2} (g)$$ | $$h\_{2} (mm)$$ | $$d\_{2} (cm)$$ |
| 1 | 196,2980 | 13,91 | 4,511 |
| 2 | 196,2982 | 13,90 | 4,510 |
| 3 | 196,2981 | 13,90 | 4,509 |
| Átlag | 196,2981 | 13,90 | 4,510 |
| Szórás | 0,0001 | 0,01 | 0,001 |

A torziós szál átmérője:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Mérés | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Átlag | Szórás |
| Átmérő ($\left[d\right]=mm$) | 0,515 | 0,505 | 0,510 | 0,510 | 0,505 | 0,510 | 0,509 | 0,004 |
| Sugár ($\left[d\right]=mm$) | 0,258 | 0,253 | 0,255 | 0,255 | 0,253 | 0,255 | 0,255 | 0,002 |

A torziós szál hossza: $l=59,5\pm 0,05 cm=0,595\pm 0,0005 m$

$$K=\frac{8πl}{r^{4}}=3,536682746⋅10^{15} m^{-3}; \frac{ΔK}{K}=\frac{Δl}{l}+4\frac{Δr}{r}=0,1⋅10^{15}m^{-3}$$

Ezért $K=\left(3,5\pm 0,1\right)⋅10^{15}m^{-3}$**,** ebből a torziómodulusz: $G=K\frac{m\_{1}+m\_{2}}{m}=80,0951 GPa$. Hibája:

 $\frac{ΔG}{G}=\frac{ΔK}{K}+\frac{Δm\_{1}+Δm\_{2}}{m\_{1}+m\_{2}}+\frac{Δm}{m}=0,04$, azaz $ΔG≅3 GPa$. Ebből G végső értéke:

$$G=80\pm 3 GPa$$

Ebből feltételezhető, hogy a torziós szál acélból készült.

**3.4. A tehetetlenségi nyomaték mérése**

**3.4.1. A tárcsák tehetetlenségi nyomatéka:**

$Θ\_{1}=\frac{1}{2}m\_{1}r\_{1}^{2}=4,9969⋅10^{-5} kg⋅m^{2};Θ\_{2}=\frac{1}{2}m\_{2}r\_{2}^{2}=4,9909⋅10^{-5} kg⋅m^{2}$, ezek hibája:

$ΔΘ\_{1}=Θ\_{1}\left(\frac{Δm\_{1}}{m\_{1}}+2\frac{Δr\_{1}}{r\_{1}}\right)=0,007⋅10^{-5}$, és $ΔΘ\_{2}=Θ\_{2}\left(\frac{Δm\_{2}}{m\_{2}}+2\frac{Δr\_{2}}{r\_{2}}\right)=0,002⋅10^{-5}$, azaz

$$Θ\_{1}=\left(4,997\pm 0,007\right)⋅10^{-5} kg⋅m^{2}, és Θ\_{2}=\left(4,991\pm 0,002\right)⋅10^{-5} kg⋅m^{2}$$

**3.4.2. A rendszer tehetetlenségi nyomatéka:**

$$Θ=Θ\_{üres}+Θ\_{1}+Θ\_{2}+\left(m\_{1}+m\_{2}\right)⋅a^{2}=\frac{Gb}{K}-Θ\_{1}-Θ\_{2}+Θ\_{1}+Θ\_{2}+\left(m\_{1}+m\_{2}\right)⋅a^{2}==b\frac{m\_{1}+m\_{2}}{m}+\left(m\_{1}+m\_{2}\right)⋅a^{2}=0,3930057⋅a^{2}+6,7999⋅10^{-4},$$

ahol $b$ az $a^{2}-T^{2}$ egyenes tengelymetszete.

**3.4.3. Az üres inga tehetetlenségi nyomatéka:**

$Θ\_{üres}=b\frac{m\_{1}+m\_{2}}{m}-Θ\_{1}-Θ\_{2}=5,8011⋅10^{-4} kg⋅m^{2}$, hibája: $ΔΘ\_{üres}=Θ\_{üres}\left(\frac{Δm}{m}+\frac{Δb}{b}\right)=0,2$. Így

$$Θ\_{üres}=\left(5,8\pm 0,2\right)⋅10^{-4} kg⋅m^{2}$$